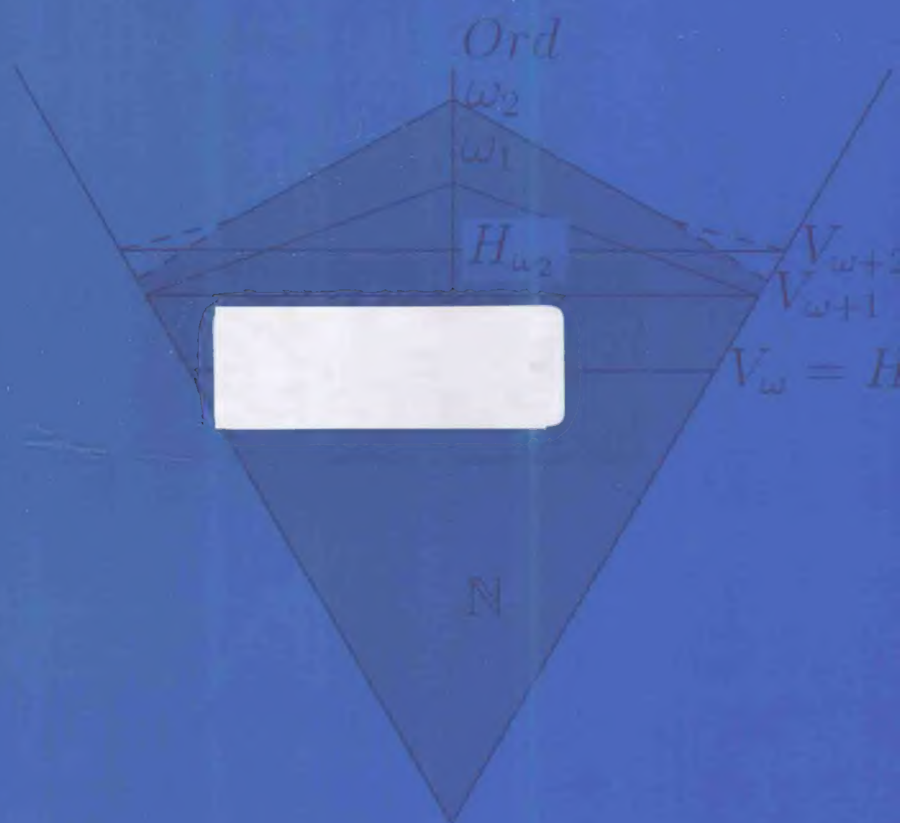
逻辑与形而上学教科书系列

集合论

对无穷概念的探索

郝兆宽　杨　跃　著



复旦大学出版社

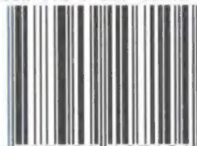
内容提要

本书是"逻辑与形而上学教科书系列"中的一本．书中介绍了集合论的基础知识，共有集合与公理，关系与函数，实数的构造，基数，滤、理想与无界闭集，集合的宇宙，可构成集，力迫等9章内容；除了讨论集合论的基本概念，还讨论了可构成集、力迫法等现代内容，同时还讨论了与连续统假设相关的一些哲学问题．

编写本书的目的是让读者在初等集合论领域有一个坚实的基础．本书可以作为数学专业、计算机专业和哲学专业高年级本科生教材．同时，对于那些关心数学哲学以及当代数学基础问题的人来说，书中的知识也是必要的准备．

本书还含有大量的习题和思考题，有助于读者深入理解所介绍的内容．

ISBN 978-7-309-10710-4



定价：35.00元

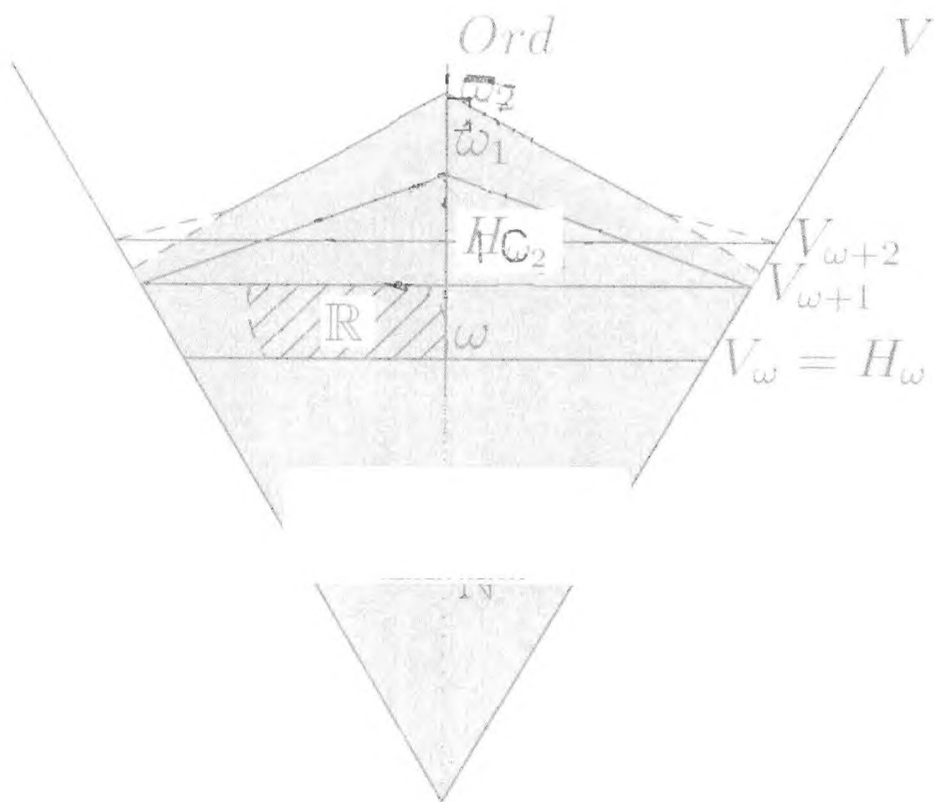
www.fudanpress.com

逻辑与形而上学教科书系列

集合论

对无穷概念的探索

郝兆宽 杨 跃 著



复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

集合论——对无穷概念的探索/郝兆宽,杨跃著.—上海:复旦大学出版社,2014.9
(逻辑与形而上学教科书系列)
ISBN 978-7-309-10710-4

Ⅰ.集… Ⅱ.①郝…②杨… Ⅲ.集论-高等学校-教材 Ⅳ.0144

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 111113 号

集合论——对无穷概念的探索
郝兆宽 杨 跃 著
责任编辑/范仁梅

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海浦东北联印刷厂

开本 787×960 1/16 印张 16.25 字数 285 千
2014 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-10710-4/O·534
定价:35.00 元

作者弁言

这是“逻辑与形而上学”丛书的第一本，讨论集合论的基本知识，其主要目的是和丛书的另一本《数理逻辑——证明及其限度》一起，为丛书的第三本《数学哲学——逻辑与形而上学重逢》做必要的数学基础知识的准备。在《数学哲学》中，我们将为一种“古老而又崭新的”哲学立场做全面的辩护，这种立场可以称为“柏拉图主义”或“数学实在论”，而我们更愿称其为“哥德尔主义”。这里不谈这种的立场的具体内容，只想指出它的一个主要方面，这就是逻辑与形而上学的紧密结合。事实上，从逻辑学的创立者亚里士多德那里开始，逻辑学就是探求形而上学的工具。此后，莱布尼兹、弗雷格、哥德尔这些伟大的逻辑学家，以及像康德、黑格尔、胡塞尔这些伟大的哲学家，都保持着逻辑与形而上学密不可分的传统。但随着分析哲学的兴起，经验论、自然主义和物理主义在 20 世纪盛行起来，逻辑学反倒成了“拒斥形而上学”的利器，而上述传统被有意无意地遗忘了。在哲学界，人们总是把逻辑学与分析哲学或经验论联系在一起，从而把逻辑学视为纯形式的、空洞的符号演算。所以我们在一本文集的编者按里曾指出：“……(逻辑经验主义) 言知识不过是经验归纳之罗列，言逻辑不过是同语反复之句法。遂使亚里士多德探索玄学奥义之工具，沦为维也纳学派拒斥形而上学之手段。”[①]

但是，纵观从 19 世纪末康托创立集合论，弗雷格创立数理逻辑以来的 100 多年，整个逻辑学和数学基础的研究实践与经验论的传统完全不相容。任何物理主义和自然主义的哲学立场都不能很好地解释这种科学实践，虽然自然主义者常常宣称对科学实践的尊重是第一位的。我们将在《数学哲学》中详细讨论这一点，而这就不可避免地涉及当代数学，特别是集合论中的一些重要的结果，它们具有极强的技术性。在准备《数学哲学》的过程中，我们日益感觉到必须有一些数理逻辑和集合论的预备知识先行让读者了解，而国内几乎没有合乎这一目的的教材，这就形成了这套 3 本系列丛书的编写计划。

[①]《逻辑与形而上学》，思想史研究第五辑，上海人民出版社，2008。

当然，本书的上述目的一点也不影响它作为一本标准的初等集合论教材使用。在编写过程中我们并未刻意于针对哲学系的学生。在我们看来，逻辑只有一个，并不存在哲学系的逻辑与数学系的逻辑，中国的逻辑与西方的逻辑之分。事实上，本书源自我们在复旦大学教授集合论课程的讲义。这门课在复旦大学开设多年，听众非常广泛。虽然数学系的学生占多数，但不乏来自计算机、软件工程、物理系，甚至生物系、经管类的学生，当然也包括哲学系的学生。

本书的编写得到了许多朋友和同事的帮助。复旦大学杨睿之先是作为学生，后是作为同事，对本书编写给出了许多有益的帮助。感谢曾两次作为集合论课程助教的复旦大学数学系徐天一同学，他和数学系于静同学一起积极参与了本书的排版和校订工作，指出了初稿中的很多错误，提出了良好的改进意见。北京师范大学数学系施翔晖、南京大学数学系喻良都曾看过初稿，并给出了有意的建议。而且，与他们日常的交流和讨论也令我们受益匪浅，在此谨致谢意。

复旦大学出版社编辑范仁梅老师对本书的出版付出大量心血，正是她细致、认真的工作，使本书得以顺利出版。

最后，感谢复旦大学哲学学院对本书的慷慨资助。

欢迎来到康托乐园

任何人都不能把我们从康托创造的乐园里赶出去。

大卫·希尔伯特

我的理论坚如磐石，每支射向它的箭都会迅速弹回，射向那些射手自己。

格奥尔格·康托

1922 年，一向温和的德国数学家希尔伯特（David Hilbert），那个时代世界数学的领袖，发表了一篇言辞激烈的演讲。他说：

> 外尔和布劳维尔的所作所为归根结底是在步克罗内克的后尘：他们要将一切他们感到麻烦的东西扫地出门，并且以克罗内克的方式建立起禁止这些东西的独裁统治，试图以此为数学奠定基础。但这将意味着肢解和破坏我们的科学，如果顺从这些改革者，我们就要冒险，就有可能丧失大部分最宝贵的财富。外尔和布劳维尔把无理数的一般概念、函数甚至是数论函数、康托的超限 [基] 数等等都宣布为不合法。……我相信，正如克罗内克不能废除无理数一样……外尔和布劳维尔今天也不可能获得成功。不！布劳维尔的 [纲领] 并不像外尔所相信的那样是正在进行的革命，他只不过是在重演一场有人尝试过的暴动，这场暴动在当初曾以更凶猛的形式进行，结果却彻底失败了。何况今日，由于弗雷格、戴德金和康托的工作，数学王国已经是武装齐备，空前强固。因此，这些努力从一开始就注定要遭受同样的厄运。①

①希尔伯特，Neubegründung der Mathematik （1922），这里依据的是威廉·爱华德（William Ewald）的英译 The New Grounding of Mathematics，收录于爱华德编 *From Kant to Hilbert*, Volume II，Oxford University Press，1996 年，1119 页。

赫尔曼 · 外尔 (Hermann Weyl) 是希尔伯特最好的学生之一，后来成了他在哥廷根的接班人。布劳维尔 (Luitzen Egberus Jan Brouwer) 是希尔伯特曾大力提携的荷兰数学家。他们两个都是 20 世纪最重要的数学家中的一员。这样的两个人竟然受到希尔伯特如此激烈的批判，主要是因为他们反对另一位数学家格奥尔格 · 康托 (Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor) 的理论。这门理论现在称为集合论。克罗内克 (Leopold Kronecker) 是康托在柏林读书时的老师，也是康托最早、最激烈的批判者之一。康托的反对者中还有更强大的，这就是和希尔伯特一样伟大的彭加勒 (Jules Henri Poincaré)，后者反对康托的言词甚至更为激烈，一则传说认为彭加勒曾经说康托的理论是数学的疾病，应当被治愈。单单听说过这些名字的人就能感到这是一场关系重大的争论。

拒绝无穷的数学

潜无穷是古希腊的哲学家亚里士多德 (Aristotle) 首先提出的：

> 至于‘无穷’虽在潜能上有此存在，然而这类潜能的命意并不指望其实现，这只在意识上有此潜在而已。实际是这样，分割一条线永不能分割完毕。在分割过程中，潜在的‘无穷’是有的。但这无限毕竟不得实现为独立的存在。”①

从这以后一直到康托的时代，整个数学界都只接受潜在的无穷概念，而拒绝“实无穷”的观念。②伟大的数学家高斯 (Carl Friedrich Gauss) 的这段话常被引用：

> 我极力反对把无穷量当成一种完成的东西来使用，这在数学上是绝对不允许的。无穷只不过是在实际谈论极限时的一个说法，有些关系可以要多接近就多接近极限，而另一些则允许无限制地增长。③

然而这种认识论倾向不断受到数学实践的挑战，同时它也阻碍着对一些基本的数学概念的理解。希尔伯特多次提到的无理数概念就是其中之一。

①亚里士多德，《形而上学》，吴寿彭译，商务印书馆，1959 年，178 页。

②也许莱布尼茨是个例外。

③高斯，《1831 年 7 月 12 日致舒马赫 (Schumacher) 的信》，这里据爱华德的英译，收录于爱华德编 *From Kant to Hilbert*, Volume I, Oxford University Press, 1996 年，303 页。

虽然任何有理数可表示为两个整数之比，然而无理数却不能用有穷个有理数来表达。这就意味着在拒绝实无穷的数学中，无理数的概念无法得到说明，因而实数概念也不能得到说明，所以克莱因（Morris Kline）在《古今数学思想》中慨叹说：

> 数学史上最使人惊奇的事实之一，是实数系的逻辑基础竟迟至 19 世纪后叶才建立起来。在那以前，即使正负有理数与无理数的最简单的性质也没有逻辑地建立，连这些数的定义也还没有。[1]

直到柯西（Augustin-Louis Cauchy）提出极限的概念，情况才有所转机。按照这种方法，无理数，例如 $\sqrt{2}$ 可以被看作有理数序列：

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ldots$$

的极限。这样，无理数得到了说明，同时又保持了潜无限的认识论。因为以上序列并非完成了的无穷，而只是不断接近的过程。可是，这里面存在着逻辑上的循环。按照柯西关于极限的的定义，必须先知道极限 $\sqrt{2}$，才能确定这个有理序列是否收敛于 $\sqrt{2}$。但是在定义出无理数之前，我们并不知道 $\sqrt{2}$ 是什么。对此，魏尔斯特拉斯（Karl Theodor Wilhelm Weierstrass）做了改进，以避免这种逻辑循环。他把序列

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ldots$$

的极限看作集合

$$\{1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ldots\}$$

而无理数 $\sqrt{2}$ 就被定义为这个集合。这样，就像有理数由整数来定义一样，无理数总算可以用有理数来定义了。可是以上定义却把一个无穷集合 $\{1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ 1.4142,\ldots\}$ 看作了“完成了的整体”，这就超出了潜无穷的认识论。

[1] 克莱因，《古今数学思想》，上海科学技术出版社，2002 年，第四卷 41 页。

康托对无穷的探索

一个集合的基数是其所包含的元素的个数。一般人们通过“数数”来确定一个集合的基数，例如

$$\begin{array}{cccc} \clubsuit & \diamondsuit & \heartsuit & \spadesuit \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

确立了集合 $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ 有 4 个元素。而这个数数的过程可以抽象为在集合 $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ 与集合 $4 = \{0, 1, 2, 3\}$ 之间建立了一个一一对应。所以，如果两个集合之间有一一对应，那它们的基数一定相等：

A 和 B 基数相等，或者称为“等数”的当且仅当A 和 B 之间有一一对应。

康托注意到可以确定两个集合等数，而不必知道其中任何一个的基数。例如，如果你看到教室里座无虚席，又没有人站着，你就可以确定椅子的基数与人的基数是相等的，虽然你不知道教室里到底有多少人和椅子。现在考虑一个无穷的集合，例如，全体自然数的集合 $\mathbb{N}$。人们很早就发现：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & \cdots \end{array}$$

全体自然数和全体平方数是等数的！而后者是前者很小的一部分。这似乎违背了基本的数学原则：整体大于部分。但这并不是真正的困难。整体大于部分只是有穷集合的性质，而与自己的一部分等数，是无穷集合区别于有穷集合的性质。

康托继续考虑更大的集合，全体有理数的集合 $\mathbb{Q}$。很快他就发现 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{N}$ 也是等数的！（毫无疑问，你将在本书中看到证明，所以此处就不提及细节了。）这个惊人的结果促使我们猜想，也许所有的无穷集合都是等数的，如果真是那样，无穷不就只是个乏味而平凡的概念了吗？幸运的是，康托很快就利用对角线法证明全体实数的集合 $\mathbb{R}$ 不与 $\mathbb{N}$ 等数。换句话说，$\mathbb{R}$ 的基数是比 $\mathbb{N}$ 的基数更大的无穷。这一结果打开了康托的乐园——对无穷进行研究的大门！实际上，运用对角线法，康托证明了对任意集合 X，X 的幂集（即 X 的所有子集组成的集合）$\mathcal{P}(X)$ 的基数总是大于 X 的基数。因此，无论一个集合的基数有多大，总可以通过它的幂集找到比它更

大的基数。例如 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ 就是比实数集合 $\mathbb{R}$ 的基数更大的集合。康托把无穷基数称为超穷数。第一个超穷数是 $\mathbb{N}$ 的基数，康托用 $\aleph_0$ 表示，而下一个超穷数就是 $\aleph_1$，于是超穷数的序列：

$$\aleph_0,\quad \aleph_1,\quad \aleph_2,\quad \aleph_3,\quad \cdots。$$

同时康托把实数集合 $\mathbb{R}$ 的基数记为 $\mathfrak{c}$，这是因为实数集合常常被称为“连续统（continumm）”。如上所说，康托已经证明 $\mathfrak{c} > \aleph_0$。由此，他作出如下猜想：

$$\mathfrak{c} = \aleph_1。$$

他认为自己很快就能证明这个猜想。可是，康托没有想到的是，这个被称为“连续统假设”的猜想，经过数学家一个多世纪的努力，至今仍未彻底地解决。

希尔伯特第一问题

1900 年夏天，巴黎迎来了新世纪的第一次数学家大会。这一年 38 岁的希尔伯特在事业上正如日中天。他在受邀发表的报告中，展望了新世纪数学的前景，紧接着提出了 23 个他认为重要的、在当时却尚未解决的问题，向 20 世纪的数学家提出挑战。这 23 个数学问题对 20 世纪数学发展的影响怎样估计都不会过分。在此后的 100 多年里，它们成为年轻数学家的行路指南。任何能解决其中某个问题的人都会在数学界赢得声望。到今天，除了有两个被认为太过模糊或者不属于数学问题外，这 23 个问题中，只有两个尚未有任何形式的解决。其中一个是“黎曼假设”(Riemann hypothesis)，它又作为新的世纪，即 21 世纪最重要的数学问题被提出来，并且悬以百万美元的奖励。

位于这 23 个神奇的问题首位的就是康托的连续统假设。所以连续统问题也称为“希尔伯特第一问题”。除了表明这是一个伟大的数学问题外，还表明希尔伯特对康托超穷数理论的巨大肯定。联想到本章开始所叙述的对康托理论的强烈反对，有希尔伯特这种有巨大影响力的数学家的坚定的支持，对集合论之后的发展具有决定性的意义。他的名言：

任何人都不能把我们从康托创造的乐园里赶出去。

直到今天还在鼓舞着数学家们对集合论的探索。1938 年，库尔特 · 哥德尔 (Kurt Gödel)，“亚里士多德以来最伟大的逻辑学家”，在希尔伯特第一问题上获得重要突破，这时距离希尔伯特提出这个问题已经近 40 年了。哥德尔的结果将在本书的第八章中讲述，这里我们先用最直观的方式陈述于下：

哥德尔证明：在现有数学的框架内，不能证明连续统假设是假的。

时间又过了 20 多年，美国数学家保罗 · 科恩 (Paul Cohen) 在 1963 年再次取得进展，他证明：

在现有数学的框架内，不能证明连续统假设是真的。

科恩因此获得了数学界的最高荣誉菲尔兹奖。哥德尔和科恩的结果表明，连续统问题的解决，依赖于更强有力的手段，而这是现今的数学所不具备的。科恩的结果将在第九章讨论。

集合论早期和其后的发展是一个广泛的课题，我们在本书的最后还会回到这个话题上来，此处的介绍难免挂一漏万。它只是在这个广阔的领域内选取一条花香四溢的小径，目的是引领你来到康托乐园的门前。而此刻，假设我们目的已经达到，你已被带到一个美丽的所在，门口写着“康托乐园”，透过大门，你甚至看到了园中绽放的美丽花朵“连续统假设”。如果你已被眼前的美景所吸引，那么，请进！

目录

作者弁言 i

欢迎来到康托乐园 i

第一章 集合与公理 1

1.1 罗素悖论 2
1.2 一点数理逻辑 3
1.3 公理 5
1.4 习题 12

第二章 关系与函数 15

2.1 关系 16
2.2 函数 19
2.3 等价与划分 23
2.4 序 25
2.5 习题 27

第三章 实数的构造 33

3.1 自然数 33
3.2 自然数上的递归定理与运算 38
3.3 等势 42
3.4 整数与有理数 47
3.5 实数 51
3.6 不可数集合 55
3.7 习题 57

第四章 序数 61

4.1 良序集 61
4.2 序数 65
4.3 超穷归纳与递归 69
4.4 序数算术 72
4.5 古德斯坦定理 77
4.6 选择公理 80
4.7 习题 87

第五章 基数 91

5.1 定义基数 91
5.2 基数算术 95
5.3 共尾 100
5.4 无穷和与积 104
5.5 基数幂运算 108
5.6 习题 113

第六章 滤、理想与无界闭集 119

6.1 集合上的滤 119
6.2 无界闭滤 124
6.3 习题 132

第七章 集合的宇宙 135

7.1 又一点数理逻辑 135
7.2 层垒的谱系 140
7.3 相对化 146
7.4 绝对性 150
7.5 基础公理的相对一致性 156
7.6 基于良基关系的归纳与递归 158
7.7 基础公理下的绝对性 163
7.8 不可达基数与 **ZFC** 的模型 169
7.9 反映定理 174
7.10 习题 178

第八章 可构成集 **183**

8.1 可定义性与哥德尔运算 183

8.2 哥德尔的 **L** 191

8.3 可构成公理与相对一致性 195

8.4 习题 201

第九章 力迫 **205**

9.1 力迫法的基本思想 206

9.2 脱殊扩张 208

9.3 力迫 213

9.4 $M[G]$ 中的 **ZFC** 220

9.5 **CH** 的相对独立性 223

9.6 **CH** + ¬**GCH** 的相对一致性 229

9.7 习题 236

参考文献 **239**

索引 **241**

第一章　集合与公理

> 对于一个科学工作者来说，最不幸的事情莫过于：当他的工作接近完成时却发现那大厦的基础已经动摇。
>
> 哥特洛布·弗雷格

1902 年 6 月，居住在德国小镇耶拿的数学家哥特洛布·弗雷格 (Gottlob Frege) 收到了寄自贝特兰·罗素 (Bertrand Russell) 的来信。此时的弗雷格已经 53 岁，正踌躇满志地等待他的巨著《算术基本规律》第二卷 (*Grundgesetze der Arithmetik*, Band II) 的出版，它已被送往印刷厂，而第一卷已经于 1893 年就出版了。他相信自己完成了一项重大的工程：**把全部数学置于逻辑的牢固基础之上**。他令人信服地证明，用他 20 年前建立的逻辑演算，再加上“(集合间的) 属于”这样一个简单概念，可以表达出全部的数学。可是，罗素的信却使弗雷格的工程面临巨大挑战。

在翌年出版的《算术基本规律》第二卷中，人们发现增加了作者写于 1902 年 10 月的《附录二》，它的开头是这样的：

> 对于一个科学工作者来说，最不幸的事情莫过于：当他的工作接近完成时却发现那大厦的基础已经动摇。而贝特兰·罗素的一封信却置我于这样的境地。[1]

是什么使弗雷格如此绝望？罗素的信中有什么东西如此沉重地打击了这位数学家？如何拯救那“基础已经动摇的大厦”？本章就来回答这些问题。

---

[1] 弗雷格，*The Basic Laws of Arithmetic*，福尔茨 (Montgomery Furth) 编译，加利福尼亚大学出版社，1964 年，127 页。

1.1 罗素悖论

集合论之父康托是在素朴 (直观) 的意义上理解集合并进行其开创性研究的。他在《超穷数理论基础》一书中为集合做了这样的“定义”:

> 我们将集合理解为任何将我们思想中那些确定而彼此独立的对象放在在一起而形成的聚合。①

按照这种对集合的理解，弗雷格在建造自己的大厦时使用以下概括原则应该毫无问题:

$$\text{对任意性质 } \psi\text{，存在集合 } X = \{x \mid \psi(x)\}\text{，}$$
$$X \text{ 恰好含有所有具有性质 } \psi \text{ 的对象。} \qquad (*)$$

可就在以上提到的 1902 年致弗雷格的信中，罗素指出这是一条自相矛盾的原则!

令 φ 为性质“不属于自己的集合”，即 $\varphi(x) =$ “x 是集合并且 $x \notin x$”，则根据 $(*)$，存在以下集合

$$R = \{x \mid \varphi(x)\}\text{。}$$

R 恰好包含所有“不属于自身”的集合。由于 R 本身是集合，所以可以问 R 是否属于 R 呢? 如果 R 属于 R，根据 R 的定义，R 有性质 φ，可性质 φ 是说不属于自身，因此 $R \notin R$; 如果 $R \notin R$，则 R 是不属于自身的集合，因此有性质 φ，根据 R 的定义，就有 $R \in R$。所以，R 属于 R 当且仅当 R 不属于 R。这个矛盾就是著名的罗素悖论。

罗素悖论的发现并不是突然的。在此之前很多类似的悖论已被注意到，例如康托自己发现的关于最大基数的悖论和布拉里 -福尔弟 (Burali-Forti) 悖论。然而，由于它们不像罗素悖论那样简明而未受重视。不过在如何看待罗素悖论的问题上有着很大的分歧。

布劳维尔、外尔以及彭加勒等把悖论视为是对康托集合论的致命一击，认为人类应该抛弃这个学科，即，放弃对超穷数的探索。希尔伯特虽然认为康托的理论必须保留，但希望能用数学“有穷的部分”来证明超穷部分的一致性，这就是他的元数学思想，一般称为“希尔伯特计划”。

---

①康托，*Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*，菲利普 · 乔丹 (Philip Jourdain) 英译，Dover Publications，1915 年，85 页。

哥德尔没有把罗素悖论看作是数学的严重问题，他认为悖论出现于“数学的边界上”，而且是靠近哲学的边界上，对数学本身影响不大。他还认为，通过对康托集合论的公理化，悖论已经被“完美地”解决了。[①]

在介绍这种分歧时不可避免地要涉及哲学，而本书的至少一部分读者是数学家，他们本能地会对哲学抱有某种并不亲切的态度。但是，集合论作为数学的一个非常独特的领域，是不可能完全避免哲学讨论的。在哥德尔看来，集合论甚至可以说是某种数学化了的哲学。其实，任何数学家，无论从事具体的哪个领域，都会面临至少一个问题：像自然数、有理数以及实数这样的“数学对象”是客观存在的呢，还是出自人类的构造？我们证明的数学定理是像物理定律那样是对某个客观世界的真实描述，还是只不过是我们玩的一种文字游戏？那些把数学世界看作独立于我们、独立于物理世界的客观存在，把数学定理视为是对这个客观世界的真实描述的观点，在哲学上被称为“实在论”，或者“柏拉图主义”。哥德尔是柏拉图主义最好的代表。

回到罗素悖论。在哥德尔看来，悖论的出现只有一个原因，就是我们对客观的集合宇宙认识的不够清楚。在物理理论中类似的情况经常出现，而且是物理学向前发展的一种基本形式。例如，有关麦克斯韦方程和经典力学伽利略（Galileo Galilei）变换之间的矛盾，是因为我们对物理时空的认识尚不准确。通过解决这个矛盾而出现的相对论则把我们对时空的认识推进了一大步。基于其实在论的立场，哥德尔有强烈的将数学、数学世界与物理、物理世界相类比的倾向。他认为罗素悖论像物理中出现的一些矛盾一样，并不造成对整个学科的困扰，而且随着策梅罗（Ernst Zermelo）公理化集合论的提出，这个问题已经完美地解决了，而解决之道就是基于数理逻辑的公理化方法。

1.2　一点数理逻辑

避免罗素悖论的成熟方案就是建立集合论的公理化系统，以“隐定义”的方式精确刻画集合，而不是仅停留在朴素的直观上。我们在下一节中将要讨论一个形式化的公理系统 **ZFC**，这就不可避免涉及一些数理逻辑的概念。

[①]哥德尔，The Modern Development of the Foundations of Mathematics in the Light of Philosophy，载于 *Collected Works, Volume III. Unpublished Essays and Lectures*，费弗曼（S. Feferman）等人编辑，Oxford University Press. 375–387 页。

我们假定读者已经知道**形式语言**、**逻辑符号**、**非逻辑符号**、**项**、**公式**、**自由变元**、**约束变元**、**语句**（即不含自由变元的公式），等等这些句法概念。事实上，可以把形式语言的初始符号指定为自然数，如 1 表示左括号 (，5 表示否定词 $\neg$，等等，而公式或语句就可看作自然数的有穷序列。假设 $\varphi = \langle n_1, \cdots, n_m \rangle$ 是这样的一个公式，令 $p_1, \cdots, p_m$ 为前 m 个素数，则

$$p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}$$

就是由 φ 唯一决定的一个自然数，所以每个公式和语句作为数学对象，也可视为是自然数。我们令 $\mathcal{L}_{set}$ 表示集合论的语言，除了逻辑符号和括号，它只包含一个二元谓词 $\in$。

假设 Σ 是一个公式集，φ 是一个公式，所谓从 Σ 到 φ 的一个**推演**，是指一个有穷的公式序列 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$，其中每个 φ_i 或者属于 Σ，或者是逻辑公理，或者由在它之前的公式 φ_j 和 $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ 得到，并且 $\varphi = \varphi_n$，通常记作 $\Sigma \vdash \varphi$。特别地，如果 T 是语句集，而 σ 是语句，如果 $T \vdash \sigma$，就称存在 T 到 σ 的一个**证明**。

如果语句集 T 满足：对任意语句 σ，$T \vdash \sigma$ 当且仅当 $\sigma \in T$，即 T 是一个对证明封闭的语句集，就称 T 为**理论**。假设 T 是理论，如果存在一个语句集 $A \subseteq T$ 使得对任意 $\sigma \in T$ 都有 $A \vdash \sigma$，就称 A 是 T 的一集**公理**。如果理论 T 的公理集 A 是**递归**的，即，任给一个语句，我们可以在有穷步内用完全机械的方法判定它是否属于 A，就称 T 是**可公理化的**。“递归”的有时也称为**可判定的**或**可计算的**。这些概念都源自自然数上的关系和函数的性质，之所以能应用到此处，是因为如上所述，公式和语句，乃至证明作为数学对象，都可看作自然数。

事实上，前面提到的形式语言的公式、语句、“从 T 到 σ 的证明”等句法概念都是递归的，还有，对公式编码的运算也是递归的。

不过理论本身，作为自然数的一个集合，通常不是递归的，而仅仅是“半递归的”，即如果 $\sigma \in T$，我们可以在有穷步内知道这一点，但如果 $\sigma \notin T$，我们却可能无法在有穷步内得出结论，这样的集合通常称为**递归可枚举的**。

我们用“理论 T”这个短语既指理论 T 本身，也指它的公理集，如我们下一节会介绍的理论 **ZFC**。一个理论 T 是**一致的**当且仅当没有语句 σ 使得 $T \vdash \sigma \wedge \neg\sigma$。

以上简单的讨论涉及了数理逻辑的两个很重要的思想。首先，虽然我们可以在 **ZFC** 内谈论很大的无穷，例如，不可达基数，但是叙述 **ZFC** 的形式语言以及形式理论 **ZFC** 本身却都是“有穷”对象：自然数或自然数的有穷序列，以及自然数上的递归关系。

ZFC 是我们谈论的对象，被称为“对象理论”，它是可以严格形式化的，即可以被看作明确的数学对象。而用来谈论和研究它的理论，即“元理论”，却是“直观”的，不能严格地形式化，不是数学的对象。元理论的边界通常是模糊的，但从以上的讨论可以看出，它至少需要包含一些初等算术的内容，否则我们根本不能有形式语言、语句、证明以及编码这些概念。不同哲学立场人容许不同强度的元理论。柏拉图主义者会容许更强的元理论，而有穷主义者或形式主义者则通常会要求元理论中不能涉及“实无穷”的概念。不过以上讨论的所有句法概念都是递归的，因而是严格有穷的对象，所以不与任何哲学立场冲突。

1.3 公理

我们不可能证明所有的命题。所以任何理论必须有一些作为出发点的命题，它们是不需要证明的。而所有其他命题则是这些初始命题根据逻辑的推论。这些初始的命题称为**公理**。形式主义者认为，在满足一致性的前提下，我们可以随便选取一些命题作为公理，只要它们足够推出我们所需的定理来就可以了。但是，在数学发展的实践中，选取哪些命题作为公理总是依赖于一些原则。其中最重要的标准就是直观上的显然性。公理既然是不需要证明的，那它的真理性就应该一目了然，使任何人都不会怀疑它是真的。当然，这条标准并不是严格明确的，历史上也多次为某个公理的自明性发生争论。早的如欧几里得（Euclid）的第五公设。晚近一点的如选择公理。虽然如此，关于自明性我们还是有一些基本的判断。比如，绝大部分人会认为“如果两个集合有相同的元素，那么这两个集合就会相等”是显然真的；而很少人会觉得“不存在一个无穷基数，它大于全体自然数的基数，而小于全体实数的基数”是显然真的。

任何形式的公理系统都包含一些逻辑公理。读者可以在任何一部关于数理逻辑的书中找到这些公理。[①]就本书的目的来讲，我们不必细究这些逻辑公理。它们所陈述的是一些逻辑真理。反过来，如果我们的证明已经直观地遵循了那些众所周知的逻辑原则，也就已经承认并使用了这些逻辑公理。但是，有一条逻辑公理值得强调：

[①] 可以参考文献 [2]。

存在公理 0 (Exi)[1] *存在一个集合,*

$$\exists x(x = x)。 \tag{1.1}$$

这条逻辑公理提醒我们，我们所遵循的逻辑有一个本体论上的承诺：我们所谈论的世界不能是虚无的，它至少存在着一个事物；具体到当前的课题，就是说至少存在一个集合时，我们所有的讨论才会获得意义。虽然策梅罗最早使用了比这更强的公理：

存在一个不含任何元素的集合。

但后面将会看到，不含任何元素的集合可以定义出来。

外延公理 1 (Ext) *两个有相同元素的集合相等：*

$$\forall X \forall Y \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \rightarrow X = Y。 \tag{1.2}$$

由于 $X = Y \rightarrow \forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$ 是逻辑的定理，我们有

$$\forall u(u \in X \leftrightarrow u \in Y) \leftrightarrow X = Y。 \tag{1.3}$$

这个公理表明集合是由其元素决定的。

1.3.1. **练习** 令 $\mathbb{N}$ 是自然数的集合，$<$ 是自然数上的序关系，证明：外延公理在 $(\mathbb{N}, <)$ 中成立。即，证明，如果我们把符号"$\in$"理解为自然数上的 $<$，把量词"$\forall$（所有的）"理解为"所有的自然数"，把"$\exists$（至少存在一个）"理解为"至少存在一个自然数"，那么外延公理是真的。

分离公理模式 2 (Sep) *令 $\varphi(u)$ 为公式。对任意集合 X，存在一个集合 $Y = \{u \in X \mid \varphi(u)\}$：*

$$\forall X \exists Y \forall u(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi(u))。 \tag{1.4}$$

我们称其为分离公理模式，是因为它实际上代表着无穷多条公理。对于每一公式 φ，都存在相应的一个分离公理。分离公理有很多不同的称呼。由于它是对概括原则的限制，所以有时就称为**概括公理**。又由于公理中的 Y 实际上是 X 的一个子集，所以有时也称为**子集公理**。然而，更多的时候它被称为分离公理。

[1] 括号中为该公理的简称，并非都是通行，只不过本书中时常使用。

分离公理是对“概括原则”(*) 的限制。给定一个性质 $\psi(x)$，概括原则允许我们定义集合 $Y=\{x\mid\psi(x)\}$，但分离公理却不允许这样做。除了给定的性质 $\psi(x)$，我们还需要已经存在的集合 X，才能利用 $\psi(x)$ 从 X 中分离出集合 Y。正如策梅罗指出的，这条公理不同于概括原则之处就在于“它有以下的限制。首要的是集合不能通过这条公理**独立地定义**，而是必须从已经存在的集合中被**分离**出来；这样，包含矛盾的概念，如‘所有集合的集合’……就被排除了。”（[13]）策梅罗所提到的排除“所有集合的集合”这一概念，正是为了避免罗素悖论这样的困境。

假设 $\varphi(x)=x\notin x$，分离公理不能确定 $R=\{x|\varphi(x)\}$ 这样的类为集合。而是断定对任意已经存在的集合 X，$R_X=\{x\in X|\varphi(x)\}$ 是集合。显然，或者 $R_X\notin R_X$ 或者 $R_X\in R_X$。但如果 $R_X\in R_X$，则必有 $R_X\in X$ 且 $R_X\notin R_X$，矛盾。所以只有 $R_X\notin R_X$。看起来我们又要陷入悖论的陷阱中。但此时，$R_X\notin R_X$ 不再导致矛盾，因为它蕴涵着 $R_X\notin X$，这样就不能从 $R_X\notin R_X$ 推出 $R_X\in R_X$ 了。通过以上分析，我们证明了：对任意集合 X，总存在一个集合 R_X，使得 $R_X\notin X$，因此所有集合的集合不存在（见 [13] 定理 10)。

令 $\varphi(u)$ 为一个性质。如果存在集合 X 满足对任意 u，$\varphi(u)$ 蕴涵着 $u\in X$，则 $\{u\mid\varphi(u)\}=\{u\in X\mid\varphi(u)\}$，根据分离公理，这样的集合存在，并且这个集合不依赖于 X，即，如果有 X' 也满足 $\varphi(u)$ 蕴涵着 $u\in X'$，则 $\{u\in X\mid\varphi(u)\}=\{u\in X'\mid\varphi(u)\}$。这种情况下，$\{u\mid\varphi(u)\}=\{u\in X\mid\varphi(u)\}$，其中 X 是满足以上条件的任意集合。据此，由于 $x\neq x\to x\in X$ 总是真的，而且根据公理 0，至少存在一个集合，所以：

1.3.2. 定义 $\{x\mid x\neq x\}$ 是集合，并且根据外延公理，它是唯一的，称为**空集**，记为 $\emptyset$。

1.3.3. 练习 证明集合 $\{x\mid x\neq x\}$ 是唯一的。

应该注意的是，如果不存在集合 X 满足对任意 u，$\varphi(u)$ 蕴涵着 $u\in X$，则 $\{u\mid\varphi(u)\}$ 就不是集合。因此我们有如下定义：

1.3.4. 定义 令 $\varphi(u)$ 为一个性质，则依据上面的分析 $\{u\mid\varphi(u)\}$ 不一定是集合，这样的对象称之为**类**（class），特别地，不是集合的类又称为**真类**(proper class)。

显然，每个集合都是类，例如 $\{x \mid x \neq x\}$。但有些类不是集合，例如，$R = \{X \mid X \notin X\}$ 就是真类。

1.3.5. **注** 由于集合论谈论的都是集合，所以不是集合的真类不是集合论的合法对象。但是为了方便，今后我们一般用粗体的大写字母表示类，例如用 $\mathbf{V}$ 表示“所有集合”的类，而公式 $x \in \mathbf{V}$ 不过是说 x 是集合，等价于公式 $x = x$。再例如，以上罗素类会记作 $\boldsymbol{R} = \{x \mid x \notin x\}$，而 $x \in \boldsymbol{R}$ 就是说 $x \notin x$。读者要注意的是，$x \in \mathbf{V}$ 不是集合论语言中的公式，它不过是集合论公式 $x = x$ 的一种记法。

1.3.6. **定义** 由分离公理，我们可以断定任意两个集合的**交**和**差**仍然是集合，分别定义如下：

$$X \cap Y = \{u \mid u \in X \wedge u \in Y\}, \qquad X - Y = \{u \mid u \in X \wedge u \notin Y\}。$$

事实上，对任意集合 $X \neq \emptyset$，它的**任意交**

$$\bigcap X = \{u \mid \forall Y(Y \in X \to u \in Y)\}$$

也是集合。

1.3.7. **练习** 证明以上命题，并且想一想如果 $X = \emptyset$ 会有什么问题。

对集公理 3 (Pai) 对任意 a 和 b，存在一个集合只以 a, b 为元素：

$$\forall a \forall b \exists c \forall x(x \in c \leftrightarrow x = a \vee x = b)。 \tag{1.5}$$

根据外延公理，这样的集合 c 是唯一的，我们把它表示为 $\{a, b\}$。由对集公理立即可得，**单点集** $\{a\} = \{a, a\}$ 是集合。

大部分读者熟悉并集的概念，即将两个集合的元素合为一个集合。下面的公理确立的是更为一般的并集的概念。它是说给定一个集合 X，我们可以用 X 的所有元素的元素构造一个新的集合。这就好像饼干罐里装满了一些独立包装的饼干，数块饼干为一小包。现在将这些独立的包装打开，就形成了另一罐饼干。第一罐的元素是包在一起的饼干，而第二罐的元素则是一块块的饼干。

并集公理 4　(Uni) 对任意集合 X，存在集合 Y 满足：$u \in Y$ 当且仅当存在 $z \in X$ 使得 $u \in z$：

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow \exists z (z \in X \wedge u \in z))。 \tag{1.6}$$

这样的 Y 是唯一的，称为 X 的**并**，记为 $\bigcup X$。特别地，我们定义 $X \cup Y = \bigcup \{X, Y\}$。

1.3.8. **定义** 如果 X 的元素都是 Y 的元素，则称 X 是 Y 的**子集**，表示为 $X \subseteq Y$。如果 $X \subseteq Y$ 并且 $X \neq Y$，则称 X 是 Y 的**真子集**，记为 $X \subset Y$。

1.3.9. **练习** 证明对任意集合 X，$\emptyset \subseteq X$。

下面的公理断言，一个集合的所有子集组成一个新的集合。

幂集公理 5　(Pow) 对任意集合 X，存在集合 Y 满足 $u \in Y$ 当且仅当 $u \subseteq X$：

$$\forall X \exists Y \forall u (u \in Y \leftrightarrow u \subseteq X)。 \tag{1.7}$$

这样的集合 Y 是唯一的，称为 X 的**幂集**，记为 $\mathcal{P}(X)$。

除了存在公理和外延公理，以上公理都是这样的形式："如果 X 是集合，则存在集合 Y……"，都是由已知的集合构造新的集合。所以这些公理有时也称为集合的"构造性公理"。现在可以看一下，由以上公理可以构造什么样的集合。首先，由存在公理和分离公理，$\emptyset$ 是集合；再由对集公理，

$$\emptyset,\quad \{\emptyset\},\quad \{\{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \cdots$$

都是集合。因为有了并集公理，我们可以构造：

$$\emptyset,\quad \{\emptyset\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\quad \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},\quad \cdots。 \tag{1.8}$$

将它们记为 $0, 1, 2, 3, \cdots$，那么，$\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ 是不是集合呢？要保证它是集合，还需要新的公理。[①] 而为了让新公理更容易表述，首先需要以下定义。

[①] 对无穷公理，马丁 · 戴维斯（Martin Davis）评论道："弗雷格可以避免无穷公理，但大家都知道他的系统最后被证明是不一致的。策梅罗（1905）的公理中明确包含有无穷公理，而罗素和怀特海（Alfred North Whitehead）的《数学原理》中也明确陈述了无穷公理。一个例外的情形是蒯因的新基础（NF, 1930）：无穷公理在这个系统中是可证的，但却要通过迂回的方式。斯派克（Specker）证明选择公理的否定在 NF 中可证。由于关于有穷集合的选择公理是可证的，所以这可推出存在一个无穷集合。"参见：The Math Forum@Drexel，2006 年。

1.3.10. 定义 对任意集合 x，集合 $x \cup \{x\}$ 称为 x 的**后继**，一般记为 $S(x)$ 或者 x^+。

无穷公理 6 (Inf) 存在集合 X，$\emptyset \in X$，并且对任意 $x \in X$，x 的后继 $S(x)$ 也属于 X。

$$\exists X[\emptyset \in X \wedge \forall x(x \in X \to S(x) \in X)]。\tag{1.9}$$

不难看出，$\{0, 1, 2, 3, \ldots\} \subseteq \omega$，所以无穷公理保证了它是一个集合。

下面一个公理有些与众不同。以上公理都是构造性的或存在性的，即都是断定某个集合存在，或由已知的集合构造新的集合。而下一个公理却是“否定性的”，它是说某些类不是集合。

基础公理 7 (Fnd) 对任意集合 $x \neq \emptyset$，存在 $y \in x$ 使得 $y \cap x = \emptyset$：

$$\forall x(x \neq \emptyset \to \exists y(y \in x \wedge x \cap y = \emptyset))。\tag{1.10}$$

基础公理有时也叫做*正则公理*，它实际上断定的是：对任意非空集合 x，x 总有一个元素 y 是关系 $\in$ 限制在 x 上的“最小元”。也就是说，x 中再没有元素属于 y 了。

它的一个直接推论就是：

1.3.11. 定理 任意集合 x 都不属于自身。

证明. 反设存在集合 $x \in x$，令 $\mathcal{I} = \{x\}$，则对 $\mathcal{I}$ 的任意元素，事实上 $\mathcal{I}$ 只有一个元素，x，都有 $x \cap \mathcal{I} = x \neq \emptyset$。与基础公理相矛盾。 □

1.3.12. 练习 证明不存在集合 $\{x_0, x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}, \ldots\}$，其中对任意 n，$x_{n+1} \in x_n$。这样的集合称为*无穷下降链*，基础公理确保不存在无穷下降链。

为了进一步的叙述，我们引入一个记法：

1.3.13. 定义 $\exists! x\psi(x)$ 表示 $\exists x\psi(x) \wedge \forall x \forall y(\psi(x) \wedge \psi(y) \to x = y)$。

显然，$\exists! x\psi(x)$ 的意思是：有**唯一的** x 具有性质 ψ。

替换公理模式 8　(Rep) 给定公式 $\psi(x,y)$，并且对任意 x，都有唯一的 y，使得 $\psi(x,y)$ 成立。则对任意集合 A，以下集合存在：

$$B=\{y\mid\exists x(x\in A\wedge\psi(x,y))\}。\tag{1.11}$$

用公式表示就是

$$\forall A\forall x\in A\exists!y\psi(x,y)\rightarrow\exists B\forall x\in A\exists y\in B\psi(x,y)。\tag{1.12}$$

首先注意到对每一公式 ψ，都有一个相应的替换公理，因此与概括公理模式一样，替换公理模式代表了无穷多条公理。其次，公式 $\forall x\in A\exists!y\psi(x,y)$ 实际上是说 ψ 表示的性质是一个函数。[①]所以替换公理是说，任何集合在一个函数下的像仍然是一个集合。因为这个像的元素个数不会比原像的元素个数多，所以它是一个不会更大的集合，因而是没有危险的。引起麻烦的集合都是因为它们太“大”了！

1.3.14. **练习**　按照前面我们对 $\{0,1,2,\cdots\}$ 的理解，证明

$$\{\{0\},\{1\},\{2\},\cdots\}$$

是集合。

选择公理 9　(**AC**) 对任意集合 $X\neq\emptyset$，如果它满足

(1)　$\emptyset\notin X$；

(2)　X 中的元素是两两不交的，即，如果 $x,y\in X$ 并且 $x\neq y$，则 $x\cap y=\emptyset$，

则存在集合 S，对任意 $x\in X$，$S\cap x$ 是单点集，即

$$\begin{aligned}&\forall X[\emptyset\notin X\wedge\forall x\in X\forall y\in X(x\cap y=\emptyset)\\&\qquad\rightarrow\exists S\forall x\in X\exists!y(S\cap x=\{y\})]。\end{aligned}\tag{1.13}$$

选择公理，一般简记为 **AC**，具有构造性公理的形式：如果 X 是集合，则存在集合 S，……。但与前面的构造性公理很不相同的是，它断定

[①] 当然，我们还没有给出函数的定义。所以也许在后面的章节叙述这条公理更为简便，事实上许多教科书也是这样做的。但我们相信本书的读者知道函数是什么，后面给出函数的定义，以及类似的像自然数、实数这样的概念，并不是要告诉读者它们是什么，而不过是用集合论的语言再现它们，是为了让读者相信集合论语言的强大。

存在的 S，一般称为 X 的选择集，不是唯一的！而且这条公理只断言了这类集合的存在，却没有给出具体构造它的方法。这种非构造性引起了对选择公理的很大争论，很多人拒绝接受选择公理，这其中包括博雷尔（Félix Édouard Justin Émile Borel）、勒贝格（Henri Léon Lebesgue）这样的大数学家。然而，关于选择公理的争论已经成为过去，今天的大部分数学家已经愿意接受它了。[①]选择公理在集合论中扮演了非常重要，非常独特的角色，我们会在第4.6节专门讨论这个公理。

公理 0 到 9 组成的公理系统称为 **ZFC**，而 0 到 8 组成的则称为 **ZF**。这个公理系统是由策梅罗在 1908 年提出的（[13]），其后很多人做了改进，一般称为策梅罗 - 弗兰克尔（Zermelo-Fraenkel）系统。

1.4 习题

1.4.1. 证明以下关于集合运算的性质。

子集的性质 对任意集合 X，Y，Z：

(1) $\emptyset \subseteq X$;

(2) $X \subseteq X$;

(3) $X \subseteq Y$ 并且 $Y \subseteq X$，则 $X = Y$;

(4) $X \subseteq Y$ 并且 $Y \subseteq Z$，则 $X \subseteq Z$。

交换律

$$\begin{aligned} X \cup Y &= Y \cup X; \\ X \cap Y &= Y \cap X。\end{aligned} \tag{1.14}$$

结合律

$$\begin{aligned} (X \cup Y) \cup Z &= X \cup (Y \cup Z); \\ (X \cap Y) \cap Z &= X \cap (Y \cap Z)。\end{aligned} \tag{1.15}$$

① 有关选择公理的讨论，请参见文献 [6]。

分配律

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z);$$
$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)。 \tag{1.16}$$

德摩根律

$$X - (Y \cup Z) = (X - Y) \cap (X - Z);$$
$$X - (Y \cap Z) = (X - Y) \cup (X - Z)。 \tag{1.17}$$

1.4.2. 令 X 和 Y 为任意集合，则 X 和 Y 的**对称差**（symmetric difference）定义为：

$$X \triangle Y = (X - Y) \cup (Y - X)。$$

证明以下等式：

$$\begin{gathered} X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - Z; \\ X - Y = \emptyset \quad \text{当且仅当} \quad X \subseteq Y; \\ X \triangle X = \emptyset; \\ X \triangle Y = Y \triangle X; \\ (X \triangle Y) \triangle Z = X \triangle (Y \triangle Z)。 \end{gathered} \tag{1.18}$$

1.4.3. 证明如果 $F \in \mathcal{F}$，则 $\bigcap \mathcal{F} \subseteq F \subseteq \bigcup \mathcal{F}$。

1.4.4. 设 $\mathcal{F}$ 为集合族，X, Y, Z 为任意集合，证明：

(1)　如果对任意集合 $F \in \mathcal{F}$ 都有 $X \subseteq F$，则 $X \subseteq \bigcap \mathcal{F}$；

(2)　如果对任意集合 $F \in \mathcal{F}$ 都有 $F \subseteq X$，则 $\bigcup \mathcal{F} \subseteq X$；

(3)　$X \subseteq Y$ 当且仅当 $X \cap Y = X$ 当且仅当 $X \cup Y = Y$ 当且仅当 $X - Y = \emptyset$；

(4)　$X \subseteq Y \cap Z$ 当且仅当 $X \subseteq Y$ 且 $X \subseteq Z$；

(5)　$Y \cup Z \subseteq X$ 当且仅当 $Y \subseteq X$ 且 $Z \subseteq X$；

(6)　$X - Y = (X \cup Y) - Y = X - (X \cap Y)$；

(7)　$X \cap Y = X - (X - Y)$；

(8)　$X - (Y - Z) = (X - Y) \cup (X \cap Z)$；

(9)　$X = Y$ 当且仅当 $X \triangle Y = \emptyset$。

1.4.5. 证明如果 $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\emptyset$，则

$$\bigcap\mathcal{F}\cap\bigcap\mathcal{G}\subseteq\bigcap(\mathcal{F}\cap\mathcal{G})。\tag{1.19}$$

举例说明:

(1) 条件 $\mathcal{F}\cap\mathcal{G}\neq\emptyset$ 是必不可少的;

(2) $\subseteq$ 不能换成 $=$。

1.4.6. 如果 X 是集合。定义 $-X=\{x\mid x\notin X\}$，证明 $-X$ 不是集合。

1.4.7.

(1) 证明“所有集合的集合”不存在;

(2) 证明对任意集合 X，存在 $u\notin X$。

1.4.8. 证明对任意集合 X，$\mathcal{P}(X)\subseteq X$ 不成立，特别地，对任意 X，$\mathcal{P}(X)\neq X$。这再次证明了“所有集合的集合”不存在。[提示：令 $Y=\{u\in X\mid u\notin u\}$；$Y\in\mathcal{P}(X)$，但是 $Y\notin X$。]

1.4.9. 对集公理、并集公理和幂集公理都可替换为较弱的形式:

对任意 a 和 b，存在一个集合 Y 满足 $a\in Y$ 并且 $b\in Y$。 **(弱对集公理)**

对任意集合 X，存在集合 Y 满足如果存在 $z\in X$ 使得 $u\in z$，则 $u\in Y$。 **(弱并集公理)**

对任意集合 X，存在集合 Y 满足如果 $u\subseteq X$，则 $u\in Y$。 **(弱幂集公理)**

用以上弱形式的公理证明对集、并集和幂集公理。[提示：仍用分离公理模式。]

第二章 关系与函数

> 我们将逻辑主义的论点分为两个部分加以讨论：(1) 数学概念 能通过明确的定义从逻辑概念中导出。 (2) 数学定理能通过纯粹的逻辑演绎从逻辑公理中推导出来。
>
> 鲁道夫·卡尔纳普

弗雷格把所有数学置于纯逻辑基础之上的研究纲领被称为“逻辑主义”。它的成功与否取决于人们对逻辑的看法。如果把集合论看作纯逻辑的一部分，那逻辑主义的立场可以说取得了巨大的成功，[①] 因为很大一部分数学家相信：

(1) 任何数学理论都在某种意义上是关于集合的理论；

(2) 任何数学命题是真的都意味着它在 **ZFC** 中得到证明。

本章和下面一章就是以上信念的体现，我们将用集合论的语言刻画经典数学的一些基本概念。这看起来是个繁重的任务，其实并非如此。因为几乎所有数学概念都是由关系、函数、序和数来定义的。本章处理关系、函数和序，下一章处理数。

不过在真正开始前我们要指出以上信念的一个巨大困难：有很多数学问题，包括集合论的核心问题——连续统假设，在通常的集合论公理系统 **ZFC** 中不是可证明的，这个问题会在本书的最后几章讨论。

另外需要指出的是，单就本章所定义的概念和证明的性质来说，我们并不需要整个 **ZFC** 系统，而只需要它的一个片段即可。具体来说，本章不依赖于无穷公理、基础公理和选择公理。[②]

[①] 不过在当今西方的哲学界，极少有人会把集合论看作逻辑，虽然这样做并没有什么道理可讲。当然，这涉及一个非常广泛的哲学问题，我们不打算在此讨论它。

[②] 事实上，幂集公理和替换公理模式也只要其中的一个即可。参见 [9]，18 页和 26 页。

2.1 关系

最简单的关系是二元关系，它可看作一种对应（correspondence）或者映射（map）。每当有第一个元素时，我们总系之于第二个元素。所以，关系的要素是成对出现的对象，而且这两个对象是有顺序的，这称为*有序对*。一般用 (a,b) 表示 a,b 组成的有序对。虽然 $\{a,b\}=\{b,a\}$，但除非 $a=b$，否则 $(a,b)\neq(b,a)$。因此，有序对的“有序性”就是：任何两个有序对 $(a,b),(a',b')$，$(a,b)=(a',b')$ 当且仅当 $a=a'$ 且 $b=b'$。

2.1.1. 定义 *设 a,b 为集合，a,b 组成的***有序对***定义为：*

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}。\tag{2.1}$$

要证明定义2.1.1是合理的，首先要证明对任何集合 a,b，$\{\{a\},\{a,b\}\}$ 是集合。这由对集公理容易得到。

2.1.2. 练习 证明对任意集合 a,b，$\{\{a\},\{a,b\}\}$ 是集合。

其次要证明：

2.1.3. 命题 *任何两个有序对 $(a,b),(a',b')$，$(a,b)=(a',b')$ 当且仅当 $a=a'$ 且 $b=b'$。*

证明. 自右至左的方向是平凡的，如果 $a=a'$ 且 $b=b'$，根据外延公理，显然有 $(a,b)=(a',b')$。为证明另一个方向，假设 $(a,b)=(a',b')$，即 $\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a'\},\{a',b'\}\}$。以下考虑两种情况：

(1) $a=b$。此时 $\{a\}=\{a,b\}$，所以 $\{\{a'\},\{a',b'\}\}=\{\{a\},\{a,b\}\}=\{\{a\}\}$，因此 $\{a\}=\{a'\}=\{a',b'\}$，从而 $a=b=a'=b'$。命题成立。

(2) $a\neq b$。此时只能有 $\{a\}=\{a'\}$ 且 $\{a,b\}=\{a',b'\}$。由前者可得 $a=a'$，由后者，再考虑到所有已知情况，必有 $b=b'$。命题也成立。

□

2.1.4. 定义 令 X 和 Y 为集合，则 X 和 Y 的**卡氏积**定义为：

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}。 \tag{2.2}$$

如果 $X = Y$，则将 $X \times X$ 简记为 X^2。

$X \times Y$ 是由已知的集合 X, Y 构造出来的，根据前面的经验，在有些构造中，新造出的对象有可能不是集合。因此，每当通过定义构造出新的对象，我们都需要证明新构造是合法的，即，由这种构造产生的对象仍然是集合。

2.1.5. 练习 证明对任意 X 和 Y，它们的卡氏积是集合。

2.1.6. 定义 一集合 R 称为**二元关系**，如果存在集合 X, Y，$R \subseteq X \times Y$。这样，二元关系 R 的所有元素都是有序对，即，对任意 $z \in R$ 存在 $x \in X$ 和 $y \in Y$ 满足 $z = (x, y)$。

一般地，用 $R(x, y)$表示 $(x, y) \in R$，称 x 和 y 有关系 R。有时习惯地写作 xRy。

2.1.7. 例

(1)　对任意集合 X, Y，它们的卡氏积 $X \times Y$ 是一个二元关系。空集 $\emptyset$ 是二元关系。

(2)　在一个平面坐标系中，整个平面是 x-轴和 y-轴的卡氏积。在这样的坐标系中，每个点都可看作由其横坐标和纵坐标组成的有序对 (x, y)，每一条曲线都可看作有序对的集合，例如 $\{(x, y) \mid x = y\}$ 是与 x-轴夹角为 $45°$ 的直线，因此是二元关系。

(3)　实数之间的大小，直线上点的左右等等，都是二元关系的例子。

2.1.8. 定义 令 R 为二元关系，

(1)　R 的**定义域**定义为：$\mathrm{dom}(R) = \{x \mid \exists y R(x, y)\}$；

(2)　R 的**值域**定义为：$\mathrm{ran}(R) = \{y \mid \exists x R(x, y)\}$；

(3)　如果 $R \subseteq X^2$，则称 R 是 X **上的二元关系**。

2.1.9. **练习** 证明 dom(R) 和 ran(R) 都是集合。

2.1.10. **例**

(1) 在平面坐标系中，直线 $\{(x,y) \mid x=y\}$ 是二元关系，它的定义域是整个 x-轴，而其值域是整个 y-轴。而曲线 $\{(x,y) \mid y=\sqrt{x}\}$ 也是二元关系，它的定义域是 x-轴原点以右的部分，而值域是 y-轴原点以上的部分。

(2) 令 $<$ 是实数上的大小关系，则 $<=\{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R} \wedge x<y\}$，从坐标系来看它包括坐标平面中位于直线 $x=y$ 以上所有点。$<\subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$，它的定义域和值域都是 $\mathbb{R}$，是 $\mathbb{R}$ 上的二元关系。

2.1.11. **定义**

(1) 集合 X 在关系 R 下的**像**定义为：

$$R[X]=\{y \in \operatorname{ran} R \mid \exists x \in X(R(x,y))\}\,; \tag{2.3}$$

(2) 集合 Y 在关系 R 下的**逆像**定义为：

$$R^{-1}[Y]=\{x \in \operatorname{dom} R \mid \exists y \in Y(R(x,y))\}\,; \tag{2.4}$$

(3) 二元关系 R 的**逆**定义为：

$$R^{-1}=\{(x,y) \mid (y,x) \in R\}\,; \tag{2.5}$$

(4) 二元关系 R 和 S 的**复合**定义为：

$$S \circ R=\{(x,z) \mid \exists y((x,y) \in R \wedge (y,z) \in S)\}\,。 \tag{2.6}$$

2.1.12. **例**

(1) 令 $R=\{(x,y) \mid x=y\}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的二元关系，则 $R^{-1}=R$ 且 $R \circ R=R$;

(2) 如果 $R=\{(x,y) \mid y=\sqrt{x}\}$, 则 $R^{-1}=\{(x,y) \mid y=x^2 \wedge x>0\}$;

(3) $\leq \circ \geq$ 等于 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ 而 $\leq \circ \leq=\leq$。

令 Y 为任意集合，R 为关系，根据以上定义，Y 在 R 下的逆像和 Y 在 R^{-1} 下的像用了同一个符号。但这种混用是没有危害的，因为它们的确是同一个集合。

2.1.13. **练习** 证明集合 Y 在关系 R 下的逆像与 Y 在 R^{-1} 下的像相等。

以下是对卡氏积和二元关系的推广。首先，定义三元有序组

$$(x_1, x_2, x_3) = ((x_1, x_2), x_3),$$

而四元序组

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = ((x_1, x_2, x_3), x_4)。$$

一般地，假设 $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ 已有定义，则 n 元序组定义为：

$$(x_1, \ldots, x_n) = ((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)。$$

这种这种定义方法称为“递归定义”或“归纳定义”。我们将在以后专门研究这种定义方法。

n 个集合的卡氏积定义为：

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in X_n\}。\tag{2.7}$$

同样，

$$X^n = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{n次}。$$

对任意集合 R，如果 $R \subseteq X_1 \times \ldots \times X_n$，则称 R 为 n **元关系**。如果 $R \subseteq X^n$，则称 R 是 X 上的 n 元关系。并且通常将 $(x_1, \cdots, x_n) \in R$ 写作 $R(x_1, \cdots, x_n)$。

2.2 函数

函数是一类特殊的关系。对一般的二元关系 R，R 定义域中的元素 x 可以对应其值域中的多个元素。例如在实数 $\mathbb{R}$ 上的关系 $\leq$ 中，0 就对应于所有大于等于 0 的实数。这种“一对多”的情形在很多情况下必须排除。设想一下，如果电脑的键盘与屏幕输出之间是一对多的话，也就是说，当你第一次敲下“a”键时，屏幕输出“a”，而下次却可能是“b”。这样的电脑一定会令人发疯。

2.2.1. **定义** 一个二元关系 f 如果满足:

$$(x,y)\in f\wedge(x,z)\in f\to y=z, \tag{2.8}$$

就称 f 是一个**函数**，其中 y 称为 f 在 x 处的值。如果 $(x,y)\in f$，我们常写作 $f(x)=y$，或者 $f:x\mapsto y$、$f_x=y$ 等。如果 $\mathrm{dom}(f)=X$，$\mathrm{ran}(f)\subseteq Y$，就称 f 是 **X 到 Y 的函数**，记为：$f:X\to Y$。

2.2.2. **例**

(1) 在我们所举的关系的例子中，$\{(x,y)\mid x=y\}$ 和 $\{(x,y)\mid y=\sqrt{x}\}$ 都是函数；而 $\mathbb{R}$ 上的 $\leq$ 关系不是函数。

(2) 以下都是自然数集合 $\mathbb{N}$ 上的函数:

$$\begin{aligned}
S_1(n)&=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},\\
S_2(n)&=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\\
S_3(n)&=1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}。
\end{aligned}$$

(3) 对任意集合 X 定义 $\mathrm{id}_X:X\to X$ 为 $\mathrm{id}_X(x)=x$，则 id_X 是 X 上的函数，称为**等同函数**。

应用外延公理，可以证明:

2.2.3. **练习** 令 f 和 g 为函数。$f=g$ 当且仅当 $\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(g)$，并且对所有 $x\in\mathrm{dom}(f)$，都有 $f(x)=g(x)$。

以下的内容都可看作构造新函数的方法。首先，两个函数的复合是函数。注意到，函数是二元关系，所以上一节定义的定义域、值域、像、逆像、逆和复合等概念都还适用。

2.2.4. **练习** 如果 f 和 g 是函数，证明它们的复合 $h=g\circ f$ 也是函数，并且 h 的定义域为 $\mathrm{dom}(h)=\mathrm{dom}(f)\cap f^{-1}[\mathrm{dom}(g)]$，并且，对所有 $x\in\mathrm{dom}(h)$，$h(x)=g(f(x))$。

2.2.5. **定义** 假设 $f:X\to Y$ 为函数，并且对所有的 $x_1,x_2\in X$，如果 $x_1\neq x_2$，则 $f(x_1)\neq f(x_2)$，这时就称 f 为**一一函数**或**单射**。如果 $\mathrm{ran}(f)=Y$，就称 f 为**满射**，既是单射又是满射的函数称为**双射**。

虽然函数的复合是函数，但函数的逆却不一定还是函数。如果一个函数的逆也是函数，就称其为**可逆的**。函数可逆的充要条件是它是单射。

2.2.6. **练习** 一个函数是可逆的当且仅当它是单射。如果 f 是可逆的，则 f^{-1} 也是可逆的，并且 $(f^{-1})^{-1}=f$。

2.2.7. **定义** 对任意函数 f 和集合 A，$f\restriction A=\{(x,y)\in f\mid x\in A\}$ 是一个函数，称为 f 到 A 上的**限制**。如果 $g=f\restriction A$，则称 f 是 g 的**扩张**。

函数作为集合，自然有交和并的运算。不难证明，任意函数的交仍然是函数。但只有满足了一定的条件，两个函数的并才是函数。

2.2.8. **定义**

(1) 函数 f 和 g 是**相容的**，如果对所有 $x\in\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g)$，都有 $f(x)=g(x)$；

(2) 函数的集合 $\mathcal{F}$ 称为**相容的系统**，如果 $\mathcal{F}$ 中的任意两个函数都是相容的。

2.2.9. **练习** 证明以下命题等价：

(1) 函数 f 和 g 是相容的；

(2) $f\cup g$ 是函数；

(3) $f\restriction(\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g))=g\restriction(\mathrm{dom}(f)\cap\mathrm{dom}(g))$。

2.2.10. **练习** 如果 $\mathcal{F}$ 是相容的函数系统，则 $\bigcup\mathcal{F}$ 是函数，它的定义域为 $\mathrm{dom}(\bigcup\mathcal{F})=\bigcup\{\mathrm{dom}(f)\mid f\in\mathcal{F}\}$。函数 $\bigcup\mathcal{F}$ 是所有 $f\in\mathcal{F}$ 的扩张。

2.2.11. **定义** 令 X 和 Y 是集合，X 到 Y 的所有函数组成的集合定义为：

$$Y^X=\{f\mid f:X\to Y\}。\tag{2.9}$$

可以证明，对任意集合 X 和 Y，X^Y 也是集合 (见习题2.5.14)，所以以上定义是合适的。注意到空集 $\emptyset$ 到任何集合 Y 上都有一个空函数 $\emptyset_Y$ (它符合函数的定义，请验证)，所以，对任意集合 Y，$Y^{\emptyset} = \{\emptyset_Y\}$，而如果 $X \neq \emptyset$，则没有 X 到空集上的函数 (根据函数的定义，这样的函数不能存在)，所以对任意 X，$\emptyset^X = \emptyset$。

2.2.12. **定义** 考虑函数 $i \mapsto X_i$，其中 $i \in I$，而每一 X_i 都是集合。对于这种以集合为值的函数我们常称为集合的**指标系统**，而 I 称为**指标集**。一般我们把指标系统写作 $X = \{X_i \mid i \in I\}$，或者 $\{X_i\}_{i \in I}$。

2.2.13. **练习** 证明以下关于指标系统的性质：

(1) 假设 $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ 是指标系统，则

$$\bigcup_{i \in I} F_i = \bigcup \mathcal{F}, \qquad \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcap \mathcal{F};$$

(2) 指标集有时可以是二维的，即 $I \times J$。此时我们规定

$$\bigcap_{i \in I, j \in J} F_{ij} = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} F_{ij}, \qquad \bigcup_{i \in I, j \in J} F_{ij} = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} F_{ij};$$

(3) 对任意公式 $\psi(i, x)$，和任意集合 I, X，

$$\bigcup_{i \in I} \{x \in X \mid \psi(i, x)\} = \{x \in X \mid \exists i \in I(\psi(i, x))\},$$

$$\bigcap_{i \in I} \{x \in X \mid \psi(i, x)\} = \{x \in X \mid \forall i \in I(\psi(i, x))\}。$$

2.2.14. **定义** 令 $X = \{X_i \mid i \in I\}$ 为指标系统，则 X 的**一般卡氏积**定义为：

$$\prod_{i \in I} X_i = \{f \mid f \text{ 是 } I \text{ 上的函数并且对任意 } i \in I,\ f(i) \in X_i\}。 \tag{2.10}$$

同时，对任意 $i \in I$，由 $p_i(f) = f(i)$ 定义的函数 $p_i : \prod_{i \in I} X_i \to X_i$ 称为**投射函数**。

2.2.15. 注 如果 $I=\{1,2\}$ 只有两个元素，则一般卡氏积 $\prod_{i\in I}X_i$ 与卡氏积 $X_1\times X_2$ 是不同的集合。前者是由定义在 I 上的函数组成的集合，而后者是有序对的集合。但是，对每一 $\prod_{i\in I}X_i$ 的元素 $f=\{(1,x),(2,y)\}$，有 $(x,y)\in X_1\times X_2$ 唯一与其对应。在这个意义上，一般卡氏积 $\prod_{i\in I}X_i$ 与卡氏积 $X_1\times X_2$ 是等同的。

选择公理 9(**第二形式**) *对任意不含空集的非空集合族 $\mathcal{F}$ 上都存在***选择函数**，*即，存在函数 $f:\mathcal{F}\to\bigcup\mathcal{F}$ 满足：对任意$F\in\mathcal{F}$，$f(F)\in F$。*

2.3 等价与划分

接下来我们介绍数学中另一个常用的概念。

2.3.1. 定义 *令 $R\subseteq X^2$ 为二元关系，则*

(1) *R 是***自反的***当且仅当对所有的 $x\in X$，$R(x,x)$；*

(2) *R 是***对称的***当且仅当对所有的 $x,y\in X$，如果 $R(x,y)$，则 $R(y,x)$；*

(3) *R 是***传递的***当且仅当对所有的 $x,y,z\in X$，如果 $R(x,y)$，且 $R(y,z)$，则 $R(x,z)$；*

(4) *R 是***等价的***当且仅当 R 是自反、对称、传递的，习惯上用 $\sim$ 表示等价关系。*

2.3.2. 例

(1) 如果 P 代表所有人的集合，如下定义 P 上的二元关系：

$$D=\big\{(x,y)\mid x\text{是}y\text{的后代}\big\}\text{；}$$
$$B=\big\{(x,y)\mid \text{至少有一个}x\text{的祖先也是}y\text{的祖先}\big\}\text{；}$$
$$S=\big\{(x,y)\mid x\text{的父母是}y\text{的父母}\big\}\text{。}$$

D 不是自反的，也不是对称的，但是传递的；B 是自反的，对称的，却不是传递的；最后，S 是等价关系。

(2) 任意集合 X 上的 $=$ 是等价关系；平面上直线的平行关系是等价关系。

2.3.3. **练习** 对任意集合 X，如果 $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}(X)$ 并满足：（1）$\emptyset\in\mathcal{I}$，(2) $A\subseteq B$ 和 $B\in\mathcal{I}$ 蕴涵 $A\in\mathcal{I}$，(3) $A,B\in\mathcal{I}$ 蕴涵 $A\cup B\in\mathcal{I}$，就称 $\mathcal{I}$ 是 X 上的**理想**。如果 $\mathcal{I}$ 是理想，则其上的二元关系：

$$R=\{(A,B)\in\mathcal{P}(\mathcal{I})\times\mathcal{P}(\mathcal{I})\mid(A\triangle B)\in\mathcal{I}\}\tag{2.11}$$

是等价关系，请证明之。

假设 $\sim$ 是集合 X 上的等价关系，对每一 $x\in X$，与 x 等价的元素构成 X 的一个子集，这些子集把 X 分成一些互不相交的部分，而它们的并正好等于 X。X 的有这样性质的子集族称为 X 的划分。

2.3.4. **定义** 令 $\sim$ 是 X 上的等价关系，$x\in X$。x 关于 $\sim$ 的**等价类**指的是集合

$$[x]_\sim=\{t\in X\mid t\sim x\}。\tag{2.12}$$

“等价类”的名称只是约定俗成，事实上每个等价类都是集合，而不是真类。

2.3.5. **练习** 令 $\sim$ 为 X 上的等价关系，则对任意 $x,y\in X$，$[x]_\sim=[y]_\sim$ 或者 $[x]_\sim\cap[y]_\sim=\emptyset$。

2.3.6. **定义** 令 X 为一集合，$S\subseteq\mathcal{P}(X)$。如果 S 满足

(1) 对所有的 $a,b\in S$，如果 $a\neq b$，则 $a\cap b=\emptyset$；

(2) $\bigcup S=X$，

则称 S 是 X 的**划分**。

2.3.7. **定义** 令 $\sim$ 为 X 上的等价关系，则 $X/\sim=\{[x]_\sim\mid x\in X\}$ 称为 X 的**商集**。

2.3.8. **定理** 令 $\sim$ 为 X 上的等价关系，则 $X/\sim$ 是 X 的一个划分。

证明. 留给读者作为练习。 □

反过来，我们可以由一个集合的划分来定义其上的等价关系。

2.3.9. 定理 令 S 为 X 的划分，定义 X 上的二元关系

$$\sim_S = \{(x,y)\in X\times X \mid \exists c\in S(x\in c\wedge y\in c)\},$$

则

(1) $\sim_S$ 是等价关系。并且 $X/\sim_S = S$；

(2) 如果 $\sim$ 是 X 上的等价关系且 $S = X/\sim$，则 $\sim_S = \sim$。

证明. 留给读者作为练习。 □

2.4 序

序是数学中的另一个重要的基本概念。我们已经知道的 $\in$ 和 $\subseteq$ 都在某种意义上是序关系。

2.4.1. 定义 令 $\leq$ 为 X 上的二元关系，如果 $\leq$ 满足：

(1) $\leq$ 是自反的，即对所有的 $x\in X$，$x\leq x$；

(2) $\leq$ 是**反对称的**，即对所有的 $x,y\in X$，如果 $x\leq y$ 且 $y\leq x$，则 $x=y$；

(3) $\leq$ 是传递的，即对所有的 $x,y,z\in X$，如果 $x\leq y$，$y\leq z$，则 $x\leq z$，

就称 $\leq$ 是 X 上的**偏序**或**序**。

如果 $\leq$ 还满足：

(4) $\leq$ 是**连接的**，即对所有的 $x,y\in X$，$x\leq y$ 或 $y\leq x$，

就称 $\leq$ 是 X 上的**线序**或**全序**。

2.4.2. 记法 我们用 $(X,\leq)$表示 $\leq$ 是 X 上的偏序（线序），此时称 X 为**偏序集（线序集）**；如果 $(X,\leq)$ 是偏序集，则对任意 $x,y\in X$，我们用 $x\geq y$ 表示 $x\leq^{-1} y$；用 $x<y$ 表示 $x\leq y$ 且 $x\neq y$；用 $x>y$ 表示 $x\geq y$ 并且 $x\neq y$。

2.4.3. **例**

(1) 实数集 $\mathbb{R}$ 上的自然大小关系都是序关系，同时也是线序关系；

(2) 对任意集合 X，$\subseteq$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 上的序关系，但不是线序；

(3) 定义 $n \mid m$ 为“n 整除 m”，则 $\mid$ 是集合 $\{2,3,4,\cdots\}$ 上的偏序关系，也不是线序。

2.4.4. **定义** 令 $\leq$ 是 X 上的偏序，则

(1) 如果 $a \in X$，并且对任意 $x \in X$，a 都“不大于”x，即 $\forall x \in X(\neg(a > x))$，则 a 称为 X 的**极小元**；反之，如果 $a \in X$，并且对任意 $x \in X$，a 都“不小于”x，即 $\forall x \in X(\neg(a < x))$，则 a 称为 X 的**极大元**。

(2) 如果 $a \in X$，并且对任意 $x \in X$，a 都“小于”x，即 $\forall x \in X(a \leq x)$，则 a 称为 X 的**最小元**；反之，如果 $a \in X$，并且对任意 $x \in X$，a 都“大于”x，即 $\forall x \in X(a \geq x)$，则 a 称为 X 的**最大元**。

(3) 如果 $X_0 \subseteq X$ 是 X 的子集，并且存在 $a \in X$，使得对任意 $x \in X_0$，都有 $a \geq x$，则称 X_0 在 X 中有上界，称 a 为 X_0 在 X 中的**上界**；如果 X_0 在 X 中所有上界的集合有最小元 a_0，就称 a_0 是 X_0 的**上确界**，记为 $\sup(X_0)$。

(4) 如果 $X_0 \subseteq X$ 是 X 的子集，并且存在 $a \in X$，使得对任意 $x \in X_0$，都有 $a \leq x$，则称 X_0 在 X 中有下界，称 a 为 X_0 在 X 中的**下界**；如果 X_0 在 X 中所有下界的集合有最小元 a_0，就称 a_0 是 X_0 的**下确界**，记为 $\inf(X_0)$。

2.4.5. **注**

(1) 由于线序是连接的，所以它的任何两个元素都是可比的，这意味着“不大于”就是“小于或等于”，“不小于”就是“大于或等于”。因此，在线序集中，极小元与最小元，极大元与最大元是同一的。

(2) 偏序集 $(X, \leq)$ 如果有最大或最小元，则它们是唯一的。

(3) 集合 X_0 的上确界如果存在，它既可能属于 X_0，也可能不属于 X_0，如果它属于 X_0，则就是 X_0 的最大元；同样，如果 X_0 有下确界且属于 X_0，则它是 X_0 的最小元。

2.4.6. **例**

(1) 实数集合 $(\mathbb{R},\leq)$ 无极大、极小元，也无最大、最小元；自然数集合 $(\mathbb{N},\leq)$ 有最小元 0，它也是极小元；

(2) 对于集合 $\{2,3,4,\cdots\}$ 和整除关系 $|$，如果 $m\neq 1$ 且 $m\neq p$，则任何素数 p 都有 $\neg(m\mid p)$，所以任何素数都是它的极小元，它有无穷多个极小元！但这个集合没有最小元。

(3) 考虑集合 $A=\{x\in\mathbb{Q}\mid x>0\wedge x^2<2\}$，它作为有理数集合 $\mathbb{Q}$ 的子集，有上界，但却没有上确界。而作为实数集合 $\mathbb{R}$ 的子集却有上确界 $\sqrt{2}$。可见，一集合有无上确界与包含它的集合有关。

2.5 习题

2.5.1. 令 R 为二元关系，$A=\bigcup(\bigcup R)$。证明如果 $(x,y)\in R$ 则 $x\in A$ 且 $y\in A$。

2.5.2. 令 R 为二元关系，A,B 为集合，证明：
(1) $R[A\cup B]=R[A]\cup R[B]$；
(2) $R[A\cap B]\subseteq R[A]\cap R[B]$；
(3) $R[A-B]\supseteq R[A]-R[B]$。
举例说明 $\subseteq$ 和 $\supseteq$ 不能替换为 $=$。

2.5.3. 证明：$((a,b),c)=((a',b'),c')$ 当且仅当 $(a,(b,c))=(a',(b',c'))$ 当且仅当 $a=a',b=b',c=c'$。因此也可用 $(a,(b,c))$ 来定义三元序组。

2.5.4. 证明：$X\times Y=\emptyset$ 当且仅当 $X=\emptyset$ 或 $Y=\emptyset$。[这一结论显然对任意 n 个集合的卡氏积都成立。不过请考虑一般卡氏积情况：假设 ω 是一个无穷集，$\Pi_{i\in\omega}X_i=\emptyset$ 当且仅当有一个 $X_i=\emptyset$，这是否依然成立？]

2.5.5. 举例证明 $(X\times X)\times X\neq X\times(X\times X)$。

2.5.6. 证明对任意集合 X, Y, Z，以下成立：

(1) $(X \cup Y) \times Z = (X \times Z) \cup (Y \times Z)$;

(2) $(X \cap Y) \times Z = (X \times Z) \cap (Y \times Z)$;

(3) $(X - Y) \times Z = (X \times Z) - (Y \times Z)$。

2.5.7. 证明：如果 $X \times Y \subseteq U \times V$ 并且 $X \times Y \neq \emptyset$，则 $X \subseteq U$ 且 $Y \subseteq V$。举例说明条件 $X \times Y \neq \emptyset$ 不可或缺。

2.5.8. 对任意二元关系 R, S, T，$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$。

2.5.9. 证明：$(R^{-1})^{-1} = R$，$\text{dom}(R^{-1}) = \text{ran}(R)$，$\text{ran}(R^{-1}) = \text{dom}(R)$，$\text{dom}(S \circ R) \subseteq \text{dom}(R)$，$\text{ran}(S \circ R) \subseteq \text{ran}(S)$，$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$。

2.5.10. X, Y, Z 都是二元关系，证明以下公式：

(1) $(X \cup Y) \circ Z = (X \circ Z) \cup (Y \circ Z)$;

(2) $Z \circ (X \cup Y) = (Z \circ X) \cup (Z \circ Y)$;

(3) $(X \cap Y) \circ Z \subseteq (X \circ Z) \cap (Y \circ Z)$;

(4) $Z \circ (X \cap Y) \subseteq (Z \circ X) \cap (Z \circ Y)$。

举例说明 $\subseteq$ 不能替换为 $=$。

2.5.11. 对任意函数 f 和集合 A, B，

(1) $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$;

(2) $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$。

举例说明 $\subseteq$ 不能替换为 $=$。

2.5.12.

(1) 证明如果函数 f 是可逆的，则 $f^{-1} \circ f = \text{id}_{\text{dom}(f)}$，$f \circ f^{-1} = \text{id}_{\text{ran}(f)}$；

(2) 对于函数 f，如果存在函数 g 使得 $g \circ f = \text{id}_{\text{dom}f}$，则 f 是可逆的，且 $f^{-1} = g \upharpoonright \text{ran}(f)$。但是，即使存在函数 h 使得 $f \circ h = \text{id}_{\text{ran}(f)}$，$f$ 也可能不是可逆的。

2.5.13. 举例说明，对于函数 f 和集合 A，$f \cap A^2 \neq f \upharpoonright A$。

2.5.14. 证明：对任意集合 X, Y，Y^X 是集合。

2.5.15. 对任意集合的指标系统 $\{X_i\}_{i \in I}$ 和 $\{Y_i\}_{i \in I}$，证明：

$$\bigcap_{i \in I}(X_i \cap Y_i) = \bigcap_{i \in I} X_i \cap \bigcap_{i \in I} Y_i;$$

$$\bigcup_{i \in I}(X_i \cup Y_i) = \bigcup_{i \in I} X_i \cup \bigcup_{i \in I} Y_i;$$

$$\bigcap_{i \in I} X_i \cup \bigcap_{i \in I} Y_i \subseteq \bigcap_{i \in I}(X_i \cup Y_i);$$

$$\bigcup_{i \in I} X_i \cap \bigcup_{i \in I} Y_i \supseteq \bigcup_{i \in I}(X_i \cap Y_i);$$

$$\bigcap_{i \in I} X_i \cup \bigcap_{j \in I} Y_j = \bigcap_{i,j \in I} (X_i \cup Y_j);$$

$$\bigcup_{i \in I} X_i \cap \bigcup_{j \in I} Y_j = \bigcup_{i,j \in I} (X_i \cap Y_j)。$$

2.5.16. 对任意指标系统 $\{X_i\}_{i \in I}$ 和集合 A，证明：

$$A - \bigcap_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I}(A - X_i);$$

$$A - \bigcup_{i \in I} X_i = \bigcap_{i \in I}(A - X_i);$$

$$\bigcap_{i \in I}(A \cup X_i) = A \cup \bigcap_{i \in I} X_i;$$

$$\bigcup_{i \in I}(A \cap X_i) = A \cap \bigcup_{i \in I} X_i。$$

2.5.17. 对任意指标系统 $\{X_i\}_{i \in I}$ 和 $\{Y_i\}_{i \in I}$，证明：

$$(\bigcup_{i \in I} X_i) \times (\bigcup_{j \in I} Y_j) = \bigcup_{i,j \in I} (X_i \times X_j);$$

$$(\bigcap_{i \in I} X_i) \times (\bigcap_{j \in I} Y_j) = \bigcap_{i,j \in I} (X_i \times X_j)。$$

2.5.18. 对任意指标系统 $\{X_i\}_{i\in I}$ 和函数 h,

$$h[\bigcup_{i\in I} X_i] = \bigcup_{i\in I} h[X_i], \quad h^{-1}[\bigcup_{i\in I} X_i] = \bigcup_{i\in I} h^{-1}[X_i];$$

$$h[\bigcap_{i\in I} X_i] \subseteq \bigcup_{i\in I} h[X_i], \quad h^{-1}[\bigcap_{i\in I} X_i] = \bigcap_{i\in I} h^{-1}[X_i]。$$

其中如果 h 是单射，则 $\subseteq$ 可换为 $=$。

2.5.19. 令 S 为非空集合的非空族，$\{X_a\}_{a\in\bigcup S}$ 为以 $\bigcup S$ 为指标集的指标系统，则

$$\bigcup_{a\in\bigcup S} X_a = \bigcup_{C\in S}(\bigcup_{a\in C} X_a), \qquad \bigcap_{a\in\bigcup S} X_a = \bigcap_{C\in S}(\bigcap_{a\in C} X_a)。$$

2.5.20. 设 $f: X\to Y$ 是满射。定义 X 上的二元关系 R 为 $(x,y)\in R$ 当且仅当 $f(x)=f(y)$，证明：

(1) R 是 X 上的等价关系；

(2) 定义 $h\subseteq X/R\times Y$ 为 $h([x]_R)=f(x)$，则 h 是商集 X/R 到 Y 上的函数，且是满射；

(3) 令 $g(x)=[x]_R$ 为 X 到 X/R 上的函数，则 $h\circ g=f$。

2.5.21. 对任意偏序集 $(X,\leq)$，如果 $Y\subseteq X$，则 $\leq\cap(Y\times Y)$ 是 Y 上的偏序。如果 $(X,\leq)$ 是线序集，则 $(Y,\leq)$ 也是线序集。但反过来，请举例说明如果 $(Y,\leq)$ 是线序集，不一定有 $(X,\leq)$ 是线序集。

2.5.22. 令 $\mathcal{F}=\{X\subseteq\mathbb{N}\mid X\text{是有穷的}\}$，找出 $(\mathcal{F},\subseteq)$ 的最小、最大、极小、极大元。

2.5.23. 如果 R 是 X 上的序，则 R^{-1} 也是 X 上的序。令 X_0 是 X 的子集，则

(1) x 是 X_0 在序 R 下的极小元当且仅当 x 是 X_0 在序 R^{-1} 下的极大元；

(2) x 是 X_0 在序 R 下的最小元当且仅当 x 是 X_0 在序 R^{-1} 下的最大元；

(3)　x 是 X_0 在序 R 下的上确界当且仅当 x 是 X_0 在序 R^{-1} 下的下确界。

2.5.24. 令 $X \neq \emptyset$，则 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ 是偏序集。证明:

(1)　任意 $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ 有上确界，并且 $\sup S = \bigcup S$;

(2)　任意 $S \subseteq \mathcal{P}(X)$ 有下确界，并且如果 $S \neq \emptyset$，则 $\inf S = \bigcap S$; 而 $\inf \emptyset = \emptyset$。

2.5.25. 如果 $(X, \leq)$ 是线序集，则它的极小 (大) 元就是最小 (大) 元。

2.5.26. 一个传递且自反的二元关系 $R \subseteq (X \times X)$ 称为 X 上的**拟序**。现令 $\preceq \subseteq X \times X$ 为拟序，则

(1)　如果定义 X 上的关系 $\sim$ 为

$$x \sim y =_{df} x \preceq y \wedge y \preceq x,$$

则 $\sim$ 是 X 上的等价关系;

(2)　如果定义商集 $X/\sim$ 上的关系 $\leq$ 为

$$[x] \leq [y] =_{df} x \preceq y,$$

则 $\leq$ 是偏序关系。

2.5.27. 令 X, Y 为集合，定义集合 $Fn(X, Y)$ 为

$$Fn(X,Y) = \{f \mid f : Z \to Y \text{是函数且} Z \subseteq X\}。$$

即，$Fn(X, Y)$ 是由 X 的子集到 Y 的所有函数组成的集合，显然 $Fn(X,Y) = \bigcup_{Z \subseteq X} Y^Z$。

(1)　证明 $\subseteq$ 是 $Fn(X, Y)$ 上的偏序;

(2)　对任意 $Fn(X, Y)$ 的子集 $\mathcal{F}$，$\mathcal{F}$ 有上确界当且仅当 $\mathcal{F}$ 是相容的函数系统; 并且，$\sup \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F}$。

2.5.28. 令 $X \neq \emptyset$ 为任意集合，令 $Pt(X) = \{S \mid S\text{是}X\text{的一个划分}\}$。定义

$$S_1 \preceq S_2 \quad \text{当且仅当} \quad \text{对任意}C \in S_1\text{，存在}D \in S_2\text{，使得}C \subseteq D\text{。}$$

证明:

(1) $\preceq$ 是 $Pt(X)$ 上的偏序;

(2) 如果 $S_1, S_2 \in Pt(X)$，则 $\{S_1, S_2\}$ 有下确界;

(3) 如果 $T \subseteq Pt(X)$，则 T 有上确界和下确界。

第三章　实数的构造

数是人类心灵的自由创造。

理查德·戴德金

在导论中我们已经提到，在集合论之前，实数的概念是不清楚的，没有一个关于实数的一致理论。本章就是叙述康托无穷集合的理论如何为实数理论奠定了牢固的基础。

3.1 自然数

我们希望用集合来表示自然数。对于 0，情况十分简单，因为有 0 个元素的集合只有一个 $\emptyset$，所以用空集代表 0 是自然的。下一个自然数是 1，可是有一个元素的集合却不止一个，事实上 $\{x \mid x \text{ 只有一个元素}\}$ 不是集合，而是一个真类。但是，在如此众多的单元集中，有最方便的一个，就是 $\{0\} = \{\emptyset\}$，所以令 $1 = \{0\}$；而下一个自然数 2 的表示也就照此办理，$2 = \{0, 1\}$。于是我们有

$$
\begin{aligned}
&0 = \emptyset, \\
&1 = \{\emptyset\} = \{0\} = 0 \cup \{0\}, \\
&2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} = 1 \cup \{1\}, \\
&3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\} = 2 \cup \{2\}, \\
&\quad \cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots\ \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

回忆“后继”的定义1.3.10。对任意集合 a，$a \cup \{a\}$ 称为 a 的后继，记为 $S(a)$ 或 a^+。由以上的分析，$1 = 0^+$，$2 = 1^+$，$\cdots$。

3.1.1. 定义 如果一个集合 X 满足：

$$\emptyset\in X\wedge\forall x(x\in X\to x^{+}\in X),\tag{3.1}$$

则称 X 为**归纳集**。

因此，无穷公理就等价于：**存在一个归纳集**。而由归纳集的定义可见，0 属于任何归纳集，并且 1 作为 0 的后继也属于任何归纳集，依此类推，所有自然数属于任何归纳集。

3.1.2. 定义 全体自然数的集合 $\mathbb{N}$ 定义为：

$$\mathbb{N}=\{n\mid\forall X(X\text{ 是归纳集 }\to n\in X)\}。\tag{3.2}$$

$\mathbb{N}$ 的元素称为**自然数**。

由分离公理和无穷公理，$\mathbb{N}$ 是一个集合，并且是唯一的。

3.1.3. 定理 $\mathbb{N}$ 是归纳集，并且是任何归纳集的子集。

证明. 首先，$\emptyset$ 属于任何归纳集，所以 $\emptyset\in\mathbb{N}$。其次，如果 $n\in\mathbb{N}$，则 n 属于任何归纳集。所以 n^{+} 属于所有归纳集，所以 $n^{+}\in\mathbb{N}$。 □

今后一般用 m,n,s,t 等表示自然数。而对于自然数 n，用 $n+1$ 表示 n^{+}。根据定义和以上的定理，自然数集合就是“最小的归纳集”，而这可表示为：

$$0\in M\wedge\forall x(x\in M\to x^{+}\in M)\to\mathbb{N}\subseteq M。\tag{3.3}$$

如果已知 M 是自然数的某个子集，即 $M\subseteq\mathbb{N}$，则以上公式就变为：

$$0\in M\wedge\forall x(x\in M\to x^{+}\in M)\to\mathbb{N}=M。\tag{3.4}$$

(3.4) 式就是所谓的**归纳原理**。为了今后运用的方便，我们还叙述归纳原理的另一等价形式：

3.1.4. $\mathbb{N}$ 上的归纳原理 令 $\varphi(x)$ 为一性质，如果

(1) $\varphi(0)$，即，0 有性质 φ；

(2) $\varphi(n)$ 蕴涵 $\varphi(n+1)$，

则对任意自然数 n，$\varphi(n)$ 成立。以公式表示：

$$[\varphi(0)\wedge\forall n\in\mathbb{N}(\varphi(n)\to\varphi(n+1))]\to\forall n\in\mathbb{N}\varphi(n)。\tag{3.5}$$

当我们用集合表示了自然数后，接下来需要考虑的是 $\mathbb{N}$ 上的序。注意到 $0 \in 1 \in 2 \in \cdots$，$\in$ 似乎是合适之选，令

$$x \underline{\in} y \text{ 表示 } x \in y \vee x = y, \tag{3.6}$$

我们讨论 $\underline{\in}$ 的性质。

3.1.5. 引理 对所有自然数 m, n, k,

(1) $n \subset n+1$ 且 $n \in n+1$；

(2) 如果 $x \in n$，则 $x \in \mathbb{N}$；

(3) $0 \underline{\in} n$；

(4) $k \in n+1$ 当且仅当 $k \underline{\in} n$；

(5) 如果 $m \in n$，则 $m+1 \underline{\in} n$；

(6) 如果 $k \in m$ 且 $m \in n$，则 $k \in n$；

(7) $n \notin n$；

(8) $m \in n$ 当且仅当 $m \subset n$。

证明. (1) 由 $n+1 = n \cup \{n\}$ 立得。

(2) 令 $M = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall x(x \in n \to x \in \mathbb{N})\}$。首先，$0 = \emptyset \in M$；假设 $n \in M$，同时假设 $x \in n+1$。因为 $n+1 = n \cup \{n\}$，所以 $x \in n$ 或 $x \in \{n\}$，如果 $x \in n$，则由归纳假设，$x \in \mathbb{N}$；如果 $x \in \{n\}$，则 $x = n$，也有 $x \in \mathbb{N}$。可见，$n \in M$ 蕴涵 $n+1 \in M$，由 (3.4)，$M = \mathbb{N}$。

(3) 令 $\varphi(x)$ 为性质“$0 \underline{\in} x$”。我们用归纳原则证明所有自然数 n 都有性质 φ。首先，$0 \underline{\in} 0$，所以 $\varphi(0)$；假设 $\varphi(n)$，$0 \underline{\in} n$，那么 $0 \in n$ 或 $0 = n$，所以 $0 \in n \cup \{n\} = n+1$，所以 $\varphi(n+1)$。

(4) $k \in n \cup \{n\}$ 当且仅当 $k \in n$ 或 $k = n$。

(5) 定义性质 $\varphi(x)$：对所有的 $m \in \mathbb{N}$，如果 $m \in x$，则 $m+1 \underline{\in} x$。首先 0 有性质 φ：因为对任意 m，$m \in 0$ 不成立。其次假设 $\varphi(n)$ 成立。我们证明 $\varphi(n+1)$，为此假设 $m \in n+1$。根据 (4)，此时有 $m \in n$ 或者 $m = n$。如果 $m \in n$，则根据归纳假设，$m+1 \underline{\in} n$，又根据 (1)，$n \in n+1$

且 $n\subset n+1$，所以 $m+1\in n+1$；而如果 $m=n$，则 $m+1=n+1$，所以也有 $m+1\subseteq n+1$。所以，$\varphi(n+1)$ 成立。根据归纳原理，对所有自然数 m,n，如果 $m\in n$，则 $m+1\subseteq n$。

(6) 定义 $\varphi(x)$：对所有的 $k,m\in\mathbb{N}$，如果 $k\in m,m\in x$，则 $k\in x$。首先 0 有性质 φ：因为 $m\in 0$ 总是不成立。其次假设 $\varphi(n)$ 成立。如果 $k\in m,m\in n+1$，则 $k\in m,m\in n$ 或 $k\in m,m=n$，不管什么情况，都有 $k\in n+1$。

(7) 由基础公理立即可得。有时我们需要避免基础公理，则用归纳法易得，见习题3.7.4。

(8) 对于自左至右的方向，假设 $m\in n$。对任意 x，如果 $x\in m$，则由 (6)，$x\in n$，因此 $m\subseteq n$。根据 (7)，$m\neq n$，所以 $m\subset n$。为证明另一个方向，任给自然数 m，定义集合 $M=\{n\in\mathbb{N}\mid m\subset n\to m\in n\}$，我们现在证明 $M=\mathbb{N}$。首先，$0\in M$，因为没有自然数满足 $m\subset 0$；其次，假设 $n\in M$，根据 (3.4)，我们只需证明 $n+1\in M$。为此，假设 $m\subset n+1=n\cup\{n\}$。此时有 3 种可能：$m\subset n$，$m=n$，$n\in m$。但是，$n\in m$ 是不可能的。因为这意味着（根据 (4)）$n+1\subseteq m$。而由假设，$m\neq n+1$，但如果 $n+1\in m$，就有 $n+1\subset m$，同样与假设矛盾。这样就只有 $m\subset n$ 和 $m=n$ 两种可能。如果 $m\subset n$，则根据归纳假设，$m\in n$，也就有 $m\in n+1$，所以 $n+1\in M$；如果 $m=n$，则 $m\in n+1$，同样 $n+1\in M$。

□

3.1.6. 定理 $(\mathbb{N},\subseteq)$ *是一个线序集。*

证明. 自反性是显然的；传递性可由引理3.1.5 (6) 得到；至于反对称性，假设 $m\subseteq n$ 且 $n\subseteq m$，如果 $n\neq m$，则必有 $n\in n$，而这与引理3.1.5 (7) 矛盾，所以只有 $n=m$。最后，为证明 $\subseteq$ 是连接的，定义性质 $\varphi(x)$：对所有的 $m\in\mathbb{N}$，$m\subseteq x$ 或者 $x\subseteq m$。

首先 0 有性质 φ：对所有的 $m\in\mathbb{N}$，$0\subseteq m$。

其次，假设 $\varphi(n)$ 成立，即，对所有的 $m\in\mathbb{N}$，$m\subseteq n$ 或者 $n\subseteq m$。而这等价于 $m\in n$ 或者 $n=m$ 或者 $n\in m$，而

- 如果 $m\in n$，则 $m\in n+1$；
- 如果 $m=n$，则 $m\in n+1$；
- 如果 $n\in m$，则 $n+1\subseteq m$。

所以，对所有的 $m\in\mathbb{N}$，$m\subseteq n+1$ 或 $n+1\subseteq m$。 □

以上结果表明，$\subseteq$ 正好表示了自然数的"自然"大小关系，于是我们可以定义：

3.1.7. **定义** 对任意 $m,n\in\mathbb{N}$，$m\leq n$ 定义为 $m\subseteq n$；$m<n$ 定义为 $m\in n$。

整数、有理数以及实数上的大小关系 $\leq$ 都是线序，但自然数的大小关系除了已经证明是线序外，还有更为重要的性质，即它还是"良序"。

3.1.8. **定义** 集合 A 上的线序 $\leq$ 如果还满足：A 的每一非空子集都有最小元。就称为**良序**。$(A,\leq)$ 称为**良序集**。

我们将在下一章仔细考察良序关系，而目前，我们只是证明 $\leq$ 是 $\mathbb{N}$ 上的良序。为此，需要以下形式的归纳原理。

3.1.9. **第二归纳原理** 令 $\varphi(x)$ 为一个性质。假设对所有的 $n\in\mathbb{N}$，

$$\text{如果对所有的}k<n\text{都有}\varphi(k)\text{，那么}\varphi(n)\text{，}$$

那么 φ 对所有的自然数 n 都成立。

证明. 定义集合 $M=\{m\in\mathbb{N}\mid\forall k(k<m\to\varphi(k))\}$。首先 $0\in M$，因为没有 $k<0$；其次，假设 $n\in M$，即对所有的 $k<n$，$\varphi(k)$ 都成立。则根据已知，$\varphi(n)$ 也成立，而这就意味着对所有的 $k<n+1$，$\varphi(k)$ 成立，故 $n+1\in M$。这样，我们就证明了：$M=\mathbb{N}$，即，对所有的 m，对所有的 $k<m$，$\varphi(k)$ 成立。然而，对任意 $k\in\mathbb{N}$，总存在 $n>k$，所以 $\varphi(k)$ 对所有的 $k\in\mathbb{N}$ 都成立。 □

3.1.10. **定理** $(\mathbb{N},\leq)$ 是良序集。

证明. 前面已经证明 $(\mathbb{N},\leq)$ 是线序集。现在只需要证明对 $\mathbb{N}$ 的每一个非空子集 X，X 都有最小元。假设 X 没有最小元，考虑集合 $\mathbb{N}-X$，我们用第二归纳原理证明 $\mathbb{N}-X=\mathbb{N}$。假设对所有的 $k<n$，$k\in\mathbb{N}-X$，那么 n 一定属于 $\mathbb{N}-X$，因为否则 $n\in X$，但是比 n 小的都不属于 X，所以 n 就是 X 的最小元，与 X 没有最小元矛盾。因此 $\mathbb{N}-X=\mathbb{N}$，$X=\emptyset$，矛盾。所以 X 有最小元。 □

3.2 自然数上的递归定理与运算

我们离完整地表示自然数理论还有一步，即定义自然数上的运算。一般是用所谓“递归定义”的方法进行的。例如加法运算可定义如下：对任意 $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} m+0 &= m, \\ m+(n+1) &= (m+n)+1。 \end{aligned} \tag{3.7}$$

在这个定义中，实际上用到了两个函数 f_1, f_2，f_1 用来确定对任意 m，$m+0$ 的值，此处是 $\mathbb{N}$ 上的等同函数，即 $f_1(m) = m$；f_2 则用来根据 $m+n$ 的值计算 $m+(n+1)$ 的值，此处实际上为后继函数，即 $f_2((m+n), n) = (m+n)^+$。因此，以上定义就是：对任意 $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} m+0 &= f_1(m), \\ m+(n+1) &= f_2\big((m+n), n\big)。 \end{aligned} \tag{3.8}$$

这种定义方式在数学中常见，读者肯定遇到过许多。但问题是：为什么这样定义是合理的？也就是说，这样的方式真的能唯一确定加法运算吗？一般的数学教材会把这诉诸直观而不加证明。的确，这样的定义也确实是直观上显然的。不过，既然集合论要作为数学的基础，那它就只能接受 **ZFC** 的公理是直观显然的，是不证自明的。所以，为了对以上定义辩护，我们要在集合论内证明：

> *如果存在函数 $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 和函数 $f_2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，则存在唯一的函数 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足：*
>
> (1) $f(m, 0) = f_1(m)$；
>
> (2) $f(m, n+1) = f_2(f(m, n), n)$。

加法是自然数上的函数，而递归的方法可用于定义 $\mathbb{N}$ 到任何集合 A 上的函数。而且在以上定义中，作为参数出现的 m 也可暂时不予考虑，于是问题转化为以下更一般的的定理：

3.2.1. 递归定理 *对任意集合 A，任意 $a \in A$，以及任意函数 $g : A \times \mathbb{N} \to A$，存在唯一的函数 $f : \mathbb{N} \to A$ 满足：*

(1) $f(0) = a$；

(2)　对所有的 $n \in \mathbb{N}$，$f(n+1) = g(f(n), n)$。

在证明定理前，我们首先给出以下定义：

3.2.2. **定义**　**序列**是以自然数 n 或全体自然数的集合 $\mathbb{N}$ 为定义域的函数。如果它的定义域是 $n \in \mathbb{N}$，则称为**长度为 n 的有穷序列**；特别地，定义域为 0 的序列称为**空序列**；而定义域为 $\mathbb{N}$ 的序列称为**无穷序列**。

一个由集合 A 中的元素组成的长度为 n 的序列是一个由 n 到 A 的函数 $s : n \to A$，注意到，所有这样的序列组成的集合是 A^n。同样，一个由集合 A 中的元素组成的无穷序列是一个由 $\mathbb{N}$ 到 A 的函数：$s : \mathbb{N} \to A$，所有这样的序列组成的集合是 $A^{\mathbb{N}}$。

序列常常用以下方式表示：

- 有穷序列：$\langle a_i \mid i < n \rangle$，或 $\langle a_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \rangle$，或 $\langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle$；
- 无穷序列：$\langle a_i \mid i \in \mathbb{N} \rangle$，或 $\langle a_i \mid i = 0, 1, 2, \ldots \rangle$，或 $\langle a_i \rangle_{i=0}^{\infty}$；
- 空序列：$\langle \rangle$；
- 由 A 的元素组成的所有有穷序列的集合：$A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$；
- 有穷序列的值域：$\{a_i \mid i < n\}$，$\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$；
- 无穷序列的值域：$\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$，$\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$。

递归定理的证明：首先，我们证明 f 的**存在性**。任取序列 $t : (m+1) \to A$，如果 $t_0 = a$ 而对所有的 $k < m$，$t_{k+1} = g(t_k, k)$，就称其为基于 a 和 g 的 m-**近似**，定义

$$\mathcal{F} = \{t \in \mathcal{P}(\mathbb{N} \times A) \mid t \text{ 是 } m\text{-近似}\}。$$

并且令 $f = \bigcup \mathcal{F}$。

以下证明 3 个事实：

(1)　f 是函数。要证明 f 是函数，只需要证明 $\mathcal{F}$ 是相容的函数系统。假设 $t, u \in \mathcal{F}$，$\mathrm{dom}(t) = n$，$\mathrm{dom}(u) = m$。同时不妨假设 $n \leq m$；现在只需证明：对于任意 $k < n$，$t_k = u_k$。显然 $t_0 = u_0 = a$；如果 $t_k = u_k$，则 $t_{k+1} = g(t_k, k) = g(u_k, k) = u_{k+1}$。由归纳原理，对于任意 $k < n$，$t_k = u_k$。

(2) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}$ 并且 $\mathrm{ran}(f) \subseteq A$。显然，$\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{N}$ 并且 $\mathrm{ran}(f) \subseteq A$。为了证明 $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}$，我们证明 $\mathbb{N} \subseteq \mathrm{dom}(f)$，即证明对所有的 $n \in \mathbb{N}$，存在一个 n-近似 t。首先，$t = \{(0,a)\}$ 是 0-近似。假设 t 是 n-近似，定义 $n+2$ 上的函数 t^+:

$$\text{对任意 } k \leq n,\text{ 令 } t_k^+ = t_k;\text{ 同时，令 } t_{n+1}^+ = g(t_n, n)。\tag{3.9}$$

显然，t^+ 是一个 $n+1$ 近似。所以任意 n 都属于某个 $t \in \mathcal{F}$ 的定义域，所以 $\mathbb{N} \subseteq \bigcup_{t\in\mathcal{F}} \mathrm{dom}(t) = \mathrm{dom}(f)$。

(3) f 满足 (1) 和 (2)。对于 (1)，显然 $f(0) = a$，因为所有 $t \in \mathcal{F}$ 都有 $t_0 = a$。而对于 (2)，如果 $t \in \mathcal{F}$ 是 $n+1$-近似，则对所有的 $k \in \mathrm{dom}(t)$，$t_k = f_k$，所以 $f(n+1) = t_{n+1} = g(t_n, n) = g(f(n), n)$。

其次，我们证明 **f 是唯一的。** 假设存在 $h : \mathbb{N} \to A$ 也满足：(i) $h(0) = a$；(ii) 对所有的 $n \in \mathbb{N}$，$h(n+1) = g(h(n), n)$。

显然 $f(0) = h(0) = a$，而且如果 $f(n) = h(n)$，则 $f(n+1) = g(f(n), n) = g(h(n), n) = h(n+1)$，由归纳法，对所有的 n，$f(n) = h(n)$，即 $f = h$。 □

在以上证明中我们省去了参数，而在使用递归定理时，使用参数是常见的情形，就像加法的定义那样。把以上定理推广到带参数的情况是很容易的。

3.2.3. 带参数的递归定理 *令 $a : P \to A$ 和 $g : P \times A \times \mathbb{N} \to A$ 为函数。存在唯一的函数 $f : P \times \mathbb{N} \to A$ 满足：*

(1) *对所有的 $p \in P$，$f(p,0) = a(p)$；*

(2) *对任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $p \in P$，$f(p, n+1) = g(p, f(p,n), n)$。*

证明. 令 A^P 为 P 到 A 的函数集合，我们定义由 $A^P \times \mathbb{N}$ 到 A^P 的一个函数 G：对任一 $(t,n) \in A^P \times \mathbb{N}$，令 $G(t,n)$ 为 A^P 中的一个函数 h，使得对任意 $p \in P$，$h(p) = g(p, t(p), n)$。这样的 h 当然是唯一的，所以以上定义是合理的。根据归纳原理，存在唯一的函数 $F : \mathbb{N} \to A^P$，满足:

(1) $F(0) = a \in A^P$；

(2) $F(n+1) = G(F(n), n)$。

最后令 $f(p,n) = F(n)(p)$，则 f 是 $P \times \mathbb{N} \to A$ 的函数，且满足 (1) 和 (2)。 □

应用递归定理，可以定义自然数上的运算。

3.2.4. 定理 存在唯一的函数 $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足：

(1) 对所有的 $m \in \mathbb{N}$，$+(m,0) = m$；

(2) 对所有的 $m,n \in \mathbb{N}$，$+(m,n+1) = +(m,n) + 1$。

证明. 应用带参数的递归定理：$A = P = \mathbb{N}$，$a(p) = p$，$g(p,x,n) = x+1$。 □

3.2.5. 定理 存在唯一的函数 $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足：

(1) 对所有的 $m \in \mathbb{N}$，$\cdot(m,0) = 0$；

(2) 对所有的 $m,n \in \mathbb{N}$，$\cdot(m,n+1) = \cdot(m,n) + m$。

根据习惯，常把 $+(m,n)$ 和 $\cdot(m,n)$ 写作 $m+n$ 和 $m \cdot n$ 或者 mn。由以上定理可以定义加法和乘法如下：

3.2.6. 定义 自然数上的加法和乘法是如下定义的 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 到 $\mathbb{N}$ 的函数：

$$\begin{array}{llll} \textbf{加法：} & m+0=m & \text{且} & m+(n+1)=(m+n)+1, \\ \textbf{乘法：} & m0=0 & \text{且} & m(n+1)=mn+m。\end{array}$$

3.2.7. 引理 对任意 $m,n,p \in \mathbb{N}$，

(1) 加法交换律：$m+n=n+m$；

(2) 加法结合律：$(m+n)+p = m+(n+p)$；

(3) 乘法交换律：$mn = nm$；

(4) 乘法结合律：$(mn)p = m(np)$；

(5) 乘法对加法的分配律：$m(n+p) = mn+mp$。

证明. 作为例子，我们证明 (1)，其余的留作习题。施归纳于 n。首先，$n=0$ 时，需要证明对任意 m，$0+m=m+0=m$：由于 (a) $0+0=0$，和 (b) $0+m=m$，所以 $0+(m+1)=(0+m)+1=m+1$ （注意这里没有使用加法结合律，而是根据加法的定义）；假设 $m+n=n+m$，现在需要证明对任意 m，$m+(n+1)=(n+1)+m$，这仍然需要归纳法。首先，$0+(n+1)=(0+n)+1=n+1$，其次假设 $m+(n+1)=(n+1)+m$，则

$$\begin{aligned}(m+1)+(n+1) &= ((m+1)+n)+1\\ &= (n+(m+1))+1\\ &= ((n+m)+1)+1\\ &= ((m+n)+1)+1\\ &= (m+(n+1))+1\\ &= ((n+1)+m)+1\\ &= (n+1)+(m+1)。\end{aligned}$$

□

3.3 等势

在继续扩大我们的数系之前，需要介绍等势的概念。正如导言中所说，康托是以这个概念为出发点开始探讨无穷的。因为，对纯粹集合论来讲，最基本的问题就是一个集合含有“多少”元素。

这里我把“多少”加了引号，是想提醒读者思考一下：说一个集合 X 有“多少”元素到底是什么意思？要知道 X 的元素个数，最简单的办法就是“数一数”，而所谓“数一数”，照直观的理解，就是在 X 与自然数集合 $\mathbb{N}$ 或 $\mathbb{N}$ 的子集（某个自然数）之间建立一一对应。可一个自然的问题是：$\mathbb{N}$ 总是够的吗？我们很快就会知道 $\mathbb{N}$ 是不够的，因此需要一个抽象化的“数一数”概念。

3.3.1. 定义 *如果在存在一个以集合 X 为定义域，以集合 Y 为值域的双射，就称集合 X 和 Y 是***等势的**，*用符号表示为 $|X|=|Y|$。*

如果存在集合 X 到集合 Y 内的单射，就称 X **的势小于等于 Y 的势**。*表示为 $|X|\leq|Y|$。$|X|\leq|Y|$ 意味着存在 Y 的子集 Z 使得 $|X|=|Z|$。*

*$|X|<|Y|$ 表示 $|X|\leq|Y|$ 但是并非 $|X|=|Y|$。*同时要意识到：$|X|<|Y|$ 并不等价于存在 Y 的真子集 Z 使得 $|X|=|Z|$。

3.3.2. **练习** 对任意集合 X, Y，定义 $X \sim Y$ 当且仅当 $|X| = |Y|$。证明 $\sim$ 是一个“等价关系”。罗素曾定义 X 的“基数”为等价类 $[X]_\sim$，这样的定义有什么问题？

$\leq$ 是一个偏序，自反性和传递性是显然的，关键一步是反对称性。

3.3.3. **康托 -伯恩斯坦定理** *如果* $|X| \leq |Y|$ *并且* $|Y| \leq |X|$，*则* $|X| = |Y|$。

证明. 因为 $|X| \leq |Y|$，故存在由 X 到 Y 的单射：$f : X \to Y$；又 $|Y| \leq |X|$，所以存在由 Y 到 X 的单射：$g : Y \to X$。首先，$f[X] \subseteq Y$，$g[Y] \subseteq X$，所以 $g[f[X]] \subseteq g[Y] \subseteq X$。显然，$|g[f[X]]| = |X|$ 而 $|g[Y]| = |Y|$。所以我们只需证明对任意集合 A, A', B，

如果 $A' \subseteq B \subseteq A$ *并且* $|A'| = |A|$，*则* $|B| = |A|$。

就能得到 $|Y| = |g[Y]| = |X|$。

令 h 为由 A 到 A' 的双射。令

$$A_0 = A, \quad B_0 = B,$$

而对于每一 n，定义

$$A_{n+1} = h[A_n], \quad B_{n+1} = h[B_n]。$$

这就递归定义了两个集合的序列。因为 $A_1 \subseteq B_0 \subseteq A_0$，由归纳可以证明对任意 n，$A_{n+1} \subseteq B_n \subseteq A_n$。令 $C_n = A_n - B_n$，并且

$$C = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n,$$

则 $C \subseteq A$。令 $D = A - C$，由于

$$\begin{aligned} h[C_n] &= h[A_n - B_n] = h[A_n] - h[B_n] \\ &= A_{n+1} - B_{n+1} = C_{n+1}, \end{aligned}$$

因此

$$h[C] = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C - C_0 = C - (A - B)。$$

现在可以定义 A 到 B 上的双射 j:

$$j(x)=\begin{cases}h(x), & 如果x\in C;\\ x, & 如果x\in D。\end{cases}$$

显然这个函数是一一的。我们只需证明它是到 B 上的满射:

$$\begin{aligned}\operatorname{ran}(j)&=g[C]\cup j[D]=h[C]\cup D\\&=j[C]\cup(A-C)=A-(C-h[C])\\&=A-(A-B)=A\cap B=B。\end{aligned}$$

□

今后对于自然数 n，我们将 $|n|$ 直接写作 n。

3.3.4. **定义** 对任意集合 X,

(1) 如果存在 $n\in\mathbb{N}$，使得 $|X|=n$，就称 X 为**有穷的**；

(2) 如果对任意 $n\in\mathbb{N}$ 都有 $|X|\neq n$，称 X 为**无穷的**；

(3) 如果 $|X|=|\mathbb{N}|$，就称 X 是**可数的**或**可数无穷的**；

(4) 有穷的或可数的集合称为**至多可数的**；

(5) 不是可数的无穷集合称为**不可数的**。

先来看有穷集合的性质。

3.3.5. **鸽笼原理** [1] 如果 n 是自然数，则不存在 n 到它的真子集 $X\subset n$ 上的双射。所以对任意有穷集合 X，不存在 X 到 X 的真子集的双射。

证明. 施归纳于 n。$n=0$ 时命题自然成立。假设命题对 n 成立而对 $n+1$ 不成立，即存在 $n+1$ 到它的真子集 $X\subset n+1$ 上的双射 f。注意到 $n\in X$ 或 $n\notin X$。如果 $n\notin X$，那么 $f\restriction n$ 是 n 到 n 的真子集 $X-\{f(n)\}$ 的双射，矛盾。如果 $n\in X$，则存在 $k\leq n$，$f(k)=n$。如果 $k=n$，即，$f(n)=n$，则 $f\restriction n$ 上是 n 到 $X-\{n\}$ 上的双射。否则，定义 n 上的函数 g:

$$g(i)=\begin{cases}f(i), & 若i\neq k;\\ f(n), & 若i=k。\end{cases}$$

g 是 n 到 n 的真子集 $X-\{n\}$ 的双射。 □

[1] 通常也会称为“抽屉原理”或“鸟巢原理”。

而对于无穷集合，这样的映射是存在的，这甚至可以看作是无穷集合的定义，见命题3.3.11。

以下一系列定理讨论可数集合的性质。作为"最小"的无穷(定理3.3.6)，可数集合的可数并，有穷多个可数集合的卡氏积，等等，都依然是可数的，即都与 $\mathbb{N}$ 一一对应。这似乎表明我们很难"超出"可数无穷这个层级，但是本章3.6节会讨论"超出"可数层级的无穷。对更大无穷的研究正是集合论的主题。

3.3.6. **定理** *每一无穷集合有一个可数子集。*

证明. 对任意无穷集合 A，应用选择公理的第二形式，令 f 为 $\mathcal{P}(A)$ 上的选择函数。定义序列 $\langle a_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ 如下：

$$\begin{aligned} a_0 &= f(A);\\ a_{n+1} &= f(A-\{a_0,\cdots,a_n\}), \end{aligned} \tag{3.10}$$

则 $\langle a_i\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ 是一一序列，所以值域是可数的且是 A 的子集。 □

3.3.7. **定理** *两个可数集合的并是可数集合。*

证明. 令 $A=\{a_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ 和 $B=\{b_n\mid n\in\mathbb{N}\}$ 为可数集合。构造序列 $\langle c_n\rangle_{n=0}^{\infty}$ 如下：

$$c_{2k}=a_k\text{并且}c_{2k+1}=b_k,\qquad k\in\mathbb{N}。$$

显然 $A\cup B=\{c_n\mid n\in\mathbb{N}\}$。 □

3.3.8. **推论** *有穷多个可数集合的并是可数的。*

3.3.9. **定理** *如果 A 和 B 是可数的，则 $A\times B$ 是可数的。*

证明. 只需要证明 $|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$。

考虑函数

$$f(k,n)=2^k\cdot(2n+1)-1。\tag{3.11}$$

首先 $f(k,n)$ 是一一的：假设 $2^{k_1}\cdot(2n_1+1)-1=2^{k_2}\cdot(2n_2+1)-1$，则 $2^{k_1-k_2}\cdot(2n_1+1)=(2n_2+1)$，如果 $k_1\neq k_2$，不妨设 $k_1>k_2$ 且 $k_1-k_2=m$，则 $2^m(2n_1+1)=2n_2+1$，等式左边为偶数而右边为奇数，矛盾。所以

$k_1 = k_2$，因此 $n_1 = n_2$。其次证明 $\text{ran} f = \mathbb{N}$。对任意自然数 m，如果 m 是偶数，则令 $k = 0$ 而 $n = m/2$，这样 $m = 2^0(2n+1) - 1$；如果 m 是奇数，则 $m+1$ 为偶数，而任何偶数可以表示为 $2^k(2n+1)$。 □

3.3.10. 推论

(1) 如果 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 都是可数的，则 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ 是可数的；

(2) 如果 $A_1, \cdots, A_n$ 是可数的，则 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 是可数的。特别地，对任意 $m > 0$，$\mathbb{N}^m$ 是可数的；

(3) 如果 A 是可数的，则 $A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ 是可数的；

(4) 如果 A 是可数的，则 A 的所有有穷子集组成的集合

$$X = \{x \subseteq A \mid \text{存在 } n,\ \ |x| = n\} \tag{3.12}$$

是可数的。

证明. 见习题3.7.15。 □

我们定义有穷用到了自然数的概念。以下介绍几种有穷的定义，可以避免使用自然数。

3.3.11. 命题 以下命题等价：

(1) 集合 X 是有穷的；

(2) 存在 X 上的线序 $\leq$ 满足 X 的每一非空子集在 $\leq$ 下有最大元和最小元；

(3) X 的每一非空子集族都有 $\subseteq$ 关系下的极大元；

(4) X 是**戴德金有穷**的，即：不存在由 X 到其真子集的一一映射。由此，我们还可定义：X 是**戴德金无穷**的当且仅当它不是戴德金有穷的。

证明. (1) $\Leftrightarrow$ (2)。如果 X 有穷，则 $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$，$0, 1, \ldots, n$ 是自然数。定义 X 上的关系为：$x_m \leq x_n$ 当且仅当 $m \leq n$，则 $\leq$ 是线序，并且 X 的每个子集都有最大最小元。反之，如果 X 满足条件，则 X 有最小元，令 X 的最小元为 x_0，而 $X - \{x_0\}$ 也有最小元，令其为 x_1，如此，令 x_{n+1} 为 $X - \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ 的最小元。由于 X 有最大元，故总存在 m，使得 $X - \{x_0, x_1, \cdots, x_m\} = \emptyset$，即 $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$。

(1) $\Leftrightarrow$ (3)。 如果 X 有穷，则存在 m，$|X| = m$。如果 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 是 X 的子集族，则对任意 $Y \in \mathcal{F}$，$|Y| \leq m$。因此 $\{|Y| \mid Y \in \mathcal{F}\}$ 有最大元，令其为 n，则满足 $|Y| = n$ 的 Y 是 $\mathcal{F}$ 的极大元。反过来，如果 X 无穷，则 $\mathcal{F} = \{Y \subseteq X \mid Y\text{是有穷的}\}$ 没有极大元。

(1) $\Leftrightarrow$ (4)。 如果 $|X| = m$，则 X 的任意真子集 Y，$|Y| = n < m$，故不存在 X 到 Y 的一一映射。反之，如果 X 无穷，则由上面的定理，X 有可数无穷子集 $X' = \{x_0, x_1, \cdots\}$。显然，$g(x_n) = x_{n+1}$ 是 X' 到 $X' - \{x_0\}$ 上的双射。令 $X_1 = X - \{x_0\}$，定义 $f : X \to X_1$ 为:

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{如果} x \in X - X', \\ g(x), & \text{如果} x \in X', \end{cases}$$

则 f 是双射。

□

3.4 整数与有理数

自然数上的加法和乘法运算都有逆运算。例如加法的逆运算减法可定义为:

$$m - n = p \quad \text{当且仅当} \quad m = n + p。$$

然而这个定义却不是合适的，因为当 $m < n$ 时，找不到 $p \in \mathbb{N}$ 使得 $m = n + p$。也就是说，自然数对减法不是封闭的。为此，我们需要扩大自然数到整数。为了清晰，今后我们将用 $\leq_{\mathbb{N}}, +_{\mathbb{N}}, \cdot_{\mathbb{N}}$ 分别表示自然数上的序、加法和乘法。

3.4.1. 定义 令 $\sim$ 是如下定义的集合 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上的等价关系

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \quad \text{当且仅当} \quad m_1 +_{\mathbb{N}} n_2 = m_2 +_{\mathbb{N}} n_1, \tag{3.13}$$

整数集合 $\mathbb{Z}$ 定义为商集 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} / \sim$。

3.4.2. 练习 证明以上定义中的 $\sim$ 是 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上的等价关系。

以下定义 $\mathbb{Z}$ 上的序和运算。

3.4.3. 定义 整数集合上的序和运算定义如下：

$$\begin{aligned}
\text{序：}\quad & [(m_1,n_1)] \leq_{\mathbb{Z}} [(m_2,n_2)] \leftrightarrow m_1 +_{\mathbb{N}} n_2 \leq_{\mathbb{N}} m_2 +_{\mathbb{N}} n_1; \\
\text{加法：}\quad & [(m_1,n_1)] +_{\mathbb{Z}} [(m_2,n_2)] = [(m_1 +_{\mathbb{N}} m_2, n_1 +_{\mathbb{N}} n_2)]; \\
\text{乘法：}\quad & [(m_1,n_1)] \cdot_{\mathbb{Z}} [(m_2,n_2)] = [(m_1 \cdot_{\mathbb{N}} m_2 +_{\mathbb{N}} n_1 \cdot_{\mathbb{N}} n_2 \\
& \qquad m_1 \cdot_{\mathbb{N}} n_2 +_{\mathbb{N}} n_1 \cdot_{\mathbb{N}} m_2)]。
\end{aligned} \tag{3.14}$$

特别地，$0_{\mathbb{Z}} = [(0,0)]$。可以证明整数上的运算满足所有我们熟悉的性质。(读者可尝试证明这些性质，如加法的交换律、结合律等等。) 今后我们用 a,b,c 等字母表示整数。

3.4.4. 命题 对任意整数 a，存在唯一的整数 a'，使得 $a +_{\mathbb{Z}} a' = 0_{\mathbb{Z}}$。

证明. 令 $a = [(m,n)]$ 为整数，取 $a' = [(n,m)]$，则 $a +_{\mathbb{Z}} a' = [(m +_{\mathbb{N}} n, n +_{\mathbb{N}} m)] = [(0,0)] = 0_{\mathbb{Z}}$。唯一性的验证留给读者。 □

这个唯一的 a' 记为 $-a$。今后，我们用 $a-b$ 表示 $a+(-b)$，同时定义 a 的绝对值如下：

3.4.5. 定义 对任意整数 a，a 的绝对值 $|a|$ 定义为

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{若} a \geq_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}, \\ -a, & \text{若} a <_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}。 \end{cases}$$

显然，对任意整数 a，$|a| \geq_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}$。

我们将 $\mathbb{Z}$ 看作 $\mathbb{N}$ 的扩张，但这并不意味着 $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$。而是说 $\mathbb{N}$ 可以"嵌入"到 $\mathbb{Z}$ 中。这个事实由以下定理表述：

3.4.6. 定理 存在函数 $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$，满足：

(1) f 是单射，$f(0) = 0_{\mathbb{Z}}$；

(2) 对任意 $m,n \in \mathbb{N}$，$m \leq_{\mathbb{N}} n$ 当且仅当 $f(m) \leq_{\mathbb{Z}} f(n)$；

(3) 对任意 $m,n \in \mathbb{N}$，$f(m +_{\mathbb{N}} n) = f(m) +_{\mathbb{Z}} f(n)$ 并且 $f(m \cdot_{\mathbb{N}} n) = f(m) \cdot_{\mathbb{Z}} f(n)$。

证明. 定义 $f(n) = [(n,0)]$。请读者验证函数 f 满足定理的要求。 □

出于同样的动机，我们以下定义全体有理数的集合 $\mathbb{Q}$。

3.4.7. 定义 令 $\mathbb{Z}^+ = \{a \in \mathbb{Z} \mid a >_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}\}$。如果 $\sim$ 是集合 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ 上的如下定义的等价关系

$$(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \quad \text{当且仅当} \quad a_1 \cdot_{\mathbb{Z}} b_2 = a_2 \cdot_{\mathbb{Z}} b_1, \tag{3.15}$$

则有理数集合 $\mathbb{Q}$ 就定义为商集 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+ / \sim$。

3.4.8. 练习 证明以上定义的 $\sim$ 是 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^+$ 上的等价关系。

我们一般用 p, q, r 表示有理数。特别地，$0_{\mathbb{Q}} = [(0_{\mathbb{Z}}, a)], 1_{\mathbb{Q}} = [(a, a)]$。

3.4.9. 定义 有理数上的序和运算定义为：

$$\begin{aligned} \text{序：} \quad & [(a_1, b_1)] \leq_{\mathbb{Q}} [(a_2, b_2)] \leftrightarrow a_1 \cdot_{\mathbb{Z}} b_2 \leq_{\mathbb{Z}} a_2 \cdot_{\mathbb{Z}} b_1; \\ \text{加法：} \quad & [(a_1, b_1)] +_{\mathbb{Q}} [(a_2, b_2)] = [(a_1 \cdot_{\mathbb{Z}} b_2 +_{\mathbb{Z}} a_2 \cdot_{\mathbb{Z}} b_1, b_1 \cdot_{\mathbb{Z}} b_2)]; \\ \text{乘法：} \quad & [(a_1, b_1)] \cdot_{\mathbb{Q}} [(a_2, b_2)] = [(a_1 \cdot_{\mathbb{Z}} a_2, b_1 \cdot_{\mathbb{Z}} b_2)]。 \end{aligned} \tag{3.16}$$

请读者自行验证以上定义的有理数运算满足如交换律、结合律、分配律等性质，或者参阅文献（[3]）104 页至 107 页。

3.4.10. 命题

(1) 对任意有理数 p，存在唯一的有理数 p_1，使得 $p +_{\mathbb{Q}} p_1 = 0_{\mathbb{Q}}$；

(2) 对任意有理数 $p \neq 0_{\mathbb{Q}}$，存在唯一的有理数 p_2，使得 $p \cdot_{\mathbb{Q}} p_2 = 1_{\mathbb{Q}}$。

证明. (1) 令 $p = [(a, b)]$，取 $p_1 = [(-a, b)]$，则 $p + p_1 = [(a \cdot_{\mathbb{Z}} b - (a \cdot_{\mathbb{Z}} b), b \cdot_{\mathbb{Z}} b)] = [(0, b \cdot_{\mathbb{Z}} b)] = 0_{\mathbb{Q}}$。

(2) 令 $p = [(a, b)]$，$a \neq 0_{\mathbb{Z}}$。如果 $a >_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}$，则取 $p_2 = [(b, a)]$，此时 $p \cdot_{\mathbb{Q}} p_2 = [(a \cdot_{\mathbb{Z}} b, a \cdot_{\mathbb{Z}} b)] = 1_{\mathbb{Q}}$；如果 $a <_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}}$，则取 $p_2 = [(-b, -a)]$，同样满足条件。

□

这个唯一的 p_1 记为 $-p$，而 p_2 记为 $1/p$。

我们用以下定理表明 $\mathbb{Z}$ 可以“嵌入”到 $\mathbb{Q}$ 中，$\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的扩张。

3.4.11. 定理 存在函数 $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$，满足：

(1) f 是单射，$f(0_{\mathbb{Z}})=0_{\mathbb{Q}}$；

(2) 对任意 $a,b\in\mathbb{Z}$，$a\leq_{\mathbb{Z}} b$ 当且仅当 $f(a)\leq_{\mathbb{Q}} f(b)$；

(3) 对任意 $a,b\in\mathbb{Z}$，$f(a+_{\mathbb{Z}} b)=f(a)+_{\mathbb{Q}} f(b)$ 并且 $f(a\cdot_{\mathbb{Z}} b)=f(a)\cdot_{\mathbb{Q}} f(b)$。

证明. 定义 $f(a)=[(a,1)]$，容易验证 f 满足要求。 □

3.4.12. 定理 可数集合上的等价关系有至多可数个等价类。

证明. 显然，如果集合 X 是可数的且 $\sim$ 是其上的等价关系，则 $f(x)=[x]$ 是 X 到 $X/\sim$ 的满射。所以 $X/\sim$ 是至多可数的。 □

3.4.13. 定理 整数集合 $\mathbb{Z}$ 和有理数的集合 $\mathbb{Q}$ 是可数无穷的。

证明. 它们都是可数集合上的等价类的集合并且是无穷的。 □

在本节的最后，我们讨论有理数集合的一个重要性质，同时介绍康托的“往复”证明法。如果 $(X,\leq)$ 是线序集，则相应的 $(X,<)$ 称为“严格线序集”，一般也称为线序集。

3.4.14. 定义 线序集 $(X,<)$ 是**稠密的**，如果它至少有两个元素，并且对任意 $a,b\in X$，如果 $a<b$，则存在 $x\in X$ 满足 $a<x<b$。

显然，有理数集合 $(\mathbb{Q},<)$ 是稠密的，根据定理3.4.13，它也是可数的，同时，有理数没有最大最小元。以下定理表明，有理数集合是同时满足所有这 3 个条件的线序集的“代表”。

3.4.15. 定理 令 $(P,<_P)$ 为可数的无端点稠密线序，则 $(P,<_P)$ 与 $(\mathbb{Q},<)$ 同构。

证明. （往复法）令 $\langle p_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ 和 $\langle q_n\mid n\in\mathbb{N}\rangle$ 分别为一一序列，并且 $P=\{p_n\mid n\in\mathbb{N}\}$，$\mathbb{Q}=\{q_n\mid n\in\mathbb{N}\}$。首先我们定义：

3.4.16. **定义** 对于线序集 $(P,<_P)$ 和 $(Q,<_Q)$，$A\subseteq P$ 和 $A'\subseteq Q$ 分别为它们的有穷子集。如果 h 是 A 到 A' 的双射，同时对任意 $x,y\in A$，$x<y$ 当且仅当 $h(x)<h(y)$，则 h 称为 $(P,<_P)$ 的 $(Q,<_Q)$ 的**局部同构**。

以下证明对于无端点稠密线序，任何局部同构都可进一步扩充。

3.4.17. **引理** 假设 $(P,<_P)$ 和 $(Q,<_Q)$ 是无端点稠密线性序。如果 h 是 P 到 Q 的局部同构，$p\in P$ 而 $q\in Q$，则存在局部同构 $h_{p,q}\supseteq h$，满足 $p\in\mathrm{dom}(h_{p,q})$ 且 $q\in\mathrm{ran}(h_{p,q})$。

对引理的证明：令 $h=\{(p_{i_1},q_{i_1}),\ldots,(p_{i_k},q_{i_k})\}$，$p_{i_1}<_P p_{i_2}<_P\cdots<_P p_{i_k}$，所以也有 $q_{i_1}<q_{i_2}<\cdots<q_{i_k}$。如果 $p\notin\mathrm{dom}(h)$，则 $p<_P p_{i_1}$ 或 $p_{i_e}<_P p<_P p_{i_{e+1}}$ 或 $p_{i_k}<_P p$。不论哪种情况，都取最小的 n 使得 q_n 与 $q_{i_1},\ldots,q_{i_k}$ 的关系与 p 与 $p_{i_1},\ldots,p_{i_k}$ 的关系类似。也就是说：

如果 $p<_P p_{i_1}$,	则$q_n<q_{i_1}$;
如果 $p_{i_e}<_P p<_P p_{i_{e+1}}$,	则$q_{i_e}<q_n<q_{i_{e+1}}$;
如果 $p_{i_k}<_P p$,	则$q_{i_k}<q_n$。

因为 $(Q,<)$ 是稠密且无端点的，所以 q_n 一定可以找到。显然 $h'=h\cup\{(p,q_n)\}$ 是局部同构，如果 $q\in\mathrm{ran}(h')$，则命题已经证明；否则，用同样的方法可以找到 $p_m\in P$ 使得 $h'\cup\{(p_m,q)\}$ 是局部同构。

现在可以证明定理了。递归定义部分同构的序列：

$$h_0=\emptyset;$$
$$h_{n+1}=(h_n)_{p_n,q_n},$$

令 $h=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}h_n$，则 $h:P\to\mathbb{Q}$ 是同构。 □

3.5 实数

早在古希腊时代，数学家已经发现有理数是不够的。有些量，如正方形的对角线与其边长的比，不能用有理数表示。为了说明我们我们定义实数的动机，首先研究一下有理数的“缺陷”。

3.5.1. 定义 线序集 $(X, \leq)$ 如果满足：

> 对任意 X 的非空子集 Y，如果 Y 有上界，则 Y 在 X 中有上确界，

则称 X 有**最小上界性质**。

3.5.2. 定理 有理数集合 $\mathbb{Q}$ 没有最小上界性质。

证明. 令 $A = \{p \mid p \text{ 是正有理数且 } p \cdot p < 2\}$。$A$ 在 $\mathbb{Q}$ 中是有上界的。我们将证明 A 没有上确界。令 $B = \{p \mid p \text{ 是正有理数且 } p \cdot p > 2\}$。现在只需证明 A 没有最大元而 B 没有最小元。对任意有理数 $p > 0$，令

$$q = p - \frac{p \cdot p - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2}, \tag{3.17}$$

则

$$q \cdot q - 2 = \frac{2(p \cdot p - 2)}{(p + 2) \cdot (p + 2)}。 \tag{3.18}$$

如果 $p \in A$，则 $p \cdot p - 2 < 0$，根据 (3.17) 式和 (3.18) 式，$q \in A$ 且 $p < q$；如果 $p \in B$，则根据 (3.17) 式和 (3.18) 式，$q \in B$ 且 $p > q$。 □

整数可表示为自然数的有序对，有理数可表示为整数的有序对。但是，实数不能表示为有理数的有序对。因为后面将证明，实数是不可数的，而有理数的有序对是可数的。实际上，每个实数需要用一个有理数的无穷集合表示。

3.5.3. 定义 如果集合 $A \subseteq \mathbb{Q}$ 满足：

(1) $A \neq \emptyset$ 且 $A \neq \mathbb{Q}$；

(2) A 是向下封闭的：如果 $p \in A$ 并且 $q < p$，则 $q \in A$；

(3) A 没有最大元：如果 $p \in A$，则存在 $q \in A$，$p < q$，

就称 A 是**戴德金分割**。全体戴德金分割的集合记为 $\mathbb{R}$，$\mathbb{R}$ 的元素又称为**实数**。

3.5.4. 注

(1)　根据以上定义，如果 $p \in A$ 但 $q \notin A$，则 $p < q$。而如果 $p \notin A$ 并且 $p < q$，则 $q \notin A$；

(2)　我们一般用 x, y, z 表示实数。而对于任意有理数 p，定义相应的实数 $p_{\mathbb{R}} = \{q \in \mathbb{Q} \mid q <_{\mathbb{Q}} p\}$。

3.5.5. 定义　*实数集合 $\mathbb{R}$ 上的序定义为：*

$$x_1 \leq_{\mathbb{R}} x_2 \text{ 当且仅当 } x_1 \subseteq x_2\text{。}$$

容易证明，$(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ 是线序集。以下定理是实数有别于有理数的最重要的特性。

3.5.6. 定理　*实数集合 $(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}})$ 有最小上界性质。*

证明. 令 X 是实数的非空子集，并且 z 是 X 的上界。令 $a = \bigcup X$。我们需要证明 a 是实数且 $a = \sup X$。显然 a 是非空的，而且，对所有 $x \in X$，都有 $x \subseteq z$，所以 $a \neq \mathbb{Q}$；其次，如果 $p \in a$ 且 $q < p$，则存在 $x_1 \in X$，$p \in x_1$ 且 $q \in x_1$，所以 $q \in a$；第三，类似的论证可以得到 x 没有最大元。这就证明了 a 是实数。显然，a 是 X 的上界。如果 b 是 X 的上界，即，对任意 $x_1 \in X$，$x_1 \subseteq b$，则显然有 $a = \bigcup X \subseteq b$。这就证明了 $a = \sup X$。　□

3.5.7. 定义　*实数集合 $\mathbb{R}$ 上的加法定义为：*

$$x +_{\mathbb{R}} y = \{p +_{\mathbb{Q}} q \mid p \in x, q \in y\}\text{。}$$

要说明以上定义合适，必须说明对任意实数 x, y，$x +_{\mathbb{R}} y = \{p + q \mid p \in x, q \in y\}$ 是戴德金分割。见习题3.7.16。

3.5.8. 命题　*对任意实数 x，存在唯一实数 x'，使得 $x + x' = 0_{\mathbb{R}}$。*

证明. 如果 x 为任意实数，则令 $x' = \{p \in \mathbb{Q} \mid \exists q > p(-q \notin x)\}$。　□

这唯一的 x' 记为 $-x$。

3.5.9. **定义** 实数上的乘法定义为：如果 $x>0, y>0$，则

$$x \cdot_{\mathbb{R}} y = \{r \mid r \le p \cdot_{\mathbb{Q}} q \text{ 其中 } p \in x, q \in y \text{ 并且 } p, q >_{\mathbb{Q}} 0\};$$

如果 $x=0$ 或 $y=0$，则 $x \cdot_{\mathbb{R}} y = 0$；而其他情况则由 x, y 都大于 0 的情况来定义。

$$x \cdot y = \begin{cases} (-x) \cdot (-y), & \text{若} x<0,\ y<0; \\ -((-x) \cdot y), & \text{若} x<0,\ y>0; \\ -(x \cdot (-y)), & \text{若} x>0,\ y<0。 \end{cases}$$

实数上加法与乘法的算术性质可由有理数上的同类性质推出。例如，加法交换律，$x +_{\mathbb{R}} y = \{p +_{\mathbb{Q}} q \mid p \in x, q \in y\} = \{q +_{\mathbb{Q}} p \mid p \in x, q \in y\} = y +_{\mathbb{R}} x$。其他仿此可得。见习题。

与前面一样，实数是有理数的扩张。

3.5.10. **定理** 存在函数 $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$，满足：

(1) f 是单射，$f(0_{\mathbb{Q}}) = 0_{\mathbb{R}}$；

(2) 对任意 $p, q \in \mathbb{Q}$，$p \le_{\mathbb{Q}} q$ 当且仅当 $f(p) \le_{\mathbb{R}} f(q)$；

(3) 对任意 $p, q \in \mathbb{Q}$，$f(p +_{\mathbb{Q}} q) = f(p) +_{\mathbb{R}} f(q)$ 并且 $f(p \cdot_{\mathbb{Q}} q) = f(p) \cdot_{\mathbb{R}} f(q)$。

证明. 定义 $f(p) = p_{\mathbb{R}}$。 □

数学中常把具有最小上界性质的稠密线序集称为**完备线序集**。实数是完备线序集，而且根据定理3.5.10，它包含有可数稠密子集 $Q_{\mathbb{R}} = f[\mathbb{Q}] = \{p_{\mathbb{R}} \mid p \in \mathbb{Q}\}$。今后我们把 $Q_{\mathbb{R}}$ 直接写作 $\mathbb{Q}$，称它的元素为有理数。另外，这里$\mathbb{Q}$ **在** $\mathbb{R}$ **中稠密**的意思是：任何两个实数之间都有一个有理数，即，$\forall x, y \in \mathbb{R}(x<y \to \exists p \in \mathbb{Q}(x<p<y))$。

3.5.11. **定理** 任何包含可数稠密子集的无端点完备线序集都与 $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$ 同构。

证明. 令 $(C, <_C)$ 是满足条件的完备线序集，而 D 是它的可数稠密子集。显然，D 没有端点，根据定理3.4.15，存在 $(D, <_C)$ 与 $(\mathbb{Q}, <_{\mathbb{R}})$ 的同构 h。对任

意 $c\in C$，令 $K_c=\{d\in D\mid d\leq_C c\}$。由于 D 是稠密的，所以存在 $d'>_C c$，因此对任意 $d\in K_c$，$d<_C d'$，又据 h 是同构，故有 $h(d)<_{\mathbb{R}} h(d')$，所以 $h[K_c]$ 在 $\mathbb{R}$ 中是有界的。这样，$\mathbb{R}$ 的完备性使我们可以定义函数 $f:C\to\mathbb{R}$ 为:

$$f(c)=\sup(h[K_c])。$$

首先，f 是满射。对任意 $x\in\mathbb{R}$，定义 $X=\{p\in\mathbb{Q}\mid p\leq_{\mathbb{R}} x\}$，则 $x=\sup X$，令 $c=\sup(h^{-1}[X])$，则 $f(c)=x$。其次，如果 $c_1<_C c_2$，则存在 $d\in D$，$c_1<_C d<_C c_2$。于是 $h(d)$ 是 $h[K_{c_1}]$ 的上界，并且 $h(d)\in h[K_{c_2}]$，故有 $\sup(h[K_{c_1}])<_{\mathbb{R}} h(d)<_{\mathbb{R}}\sup(h[K_{c_2}])$，因此 $f(c_1)<_{\mathbb{R}} f(c_2)$。最后，我们还要证明，对任意 $d\in D$，$f(d)=h(d)$，而这由于 h 是同构，所以是显然的。 □

3.6 不可数集合

虽然自然数、整数和有理数集合都是可数的，但实数集合却不是。本节讨论我们遇到的第一个不可数集合。首先需要一个引理，也许很多读者对它已经十分熟悉。

3.6.1. **区间套定理** 设序列 $\{I_n\mid n\in\omega\}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个**闭区间套**，即，

(1) 每一 I_n 都是 $\mathbb{R}$ 中的闭区间；

(2) 对任意 n，$I_{n+1}\subset I_n$，

那么 $\bigcap_{n\in\omega} I_n\neq\emptyset$。

证明. 见习题3.7.18。 □

3.6.2. **定理（康托）** $\{0,1\}$ 上的全体无穷序列组成的集合 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 是不可数的。

证明. 如果 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 是可数的，则一定存在 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 上的一个满射。我们证明这样的满射不存在。任取 $\mathbb{N}$ 到 $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ 的函数 α，考虑 α 的值域 $\mathrm{ran}(\alpha)=\{\alpha_0,\alpha_1,\cdots\}$，其中每个 α_n 是一个 0-1 序列

$$\alpha_n=(\alpha_n(0),\alpha_n(1),\alpha_n(2),\cdots)。$$

以下我们证明 $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \neq \mathrm{ran}(\alpha)$。

定义序列 β 为

$$\text{对任意自然数 } n,\ \beta(n) = 1 - \alpha_n(n)。 \tag{3.19}$$

$\beta \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$。但是，对任意 $\alpha_n \in \mathrm{ran}(\alpha)$，如果 $\alpha_n(n) = 1$，则 $\beta(n) = 0$，反之亦然。所以 $\beta \notin \mathrm{ran}(\alpha)$。这种证明的方法称为**对角线法**。 □

3.6.3. 定理 *所有实数的集合 $\mathbb{R}$ 是不可数的。*

证明. 首先, 定义一个实数子集的序列 $C_0, C_1, \cdots$，使其满足以下条件:

(1) $C_0 = [0,1]$;

(2) C_{n+1} 是将 C_n 中每个区间的中间三分之一开部分去掉，即 C_n 中的每个 $[a,b]$ 被替换为两个闭区间

$$L[a,b] = [a, a + \frac{1}{3}(b-a)],$$
$$R[a,b] = [a + \frac{2}{3}(b-a), b]。$$

所以我们有 $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$。考虑定理3.6.2中所有 $0-1$ 序列的集合 D，对每一 $\delta \in D$，我们递归地定义一个闭区间的序列

$$F_0^\delta, F_1^\delta, \cdots$$

如下:

$$F_0^\delta = C_0 = [0,1],$$
$$F_{n+1}^\delta = \begin{cases} LF_n^\delta, & \text{若}\delta(n) = 0, \\ RF_n^\delta, & \text{若}\delta(n) = 1。\end{cases}$$

由归纳，对每一 n，F_n^δ 是 C_n 的一个长度为 3^{-n} 的闭区间。而且

$$F_0^\delta \supset F_1^\delta \supset \cdots。$$

由区间套定理可知，这一序列的交不空，又因为当 n 趋向无穷时，F_n^δ 的长度趋近 0，所以这个交至多包含一个实数。令

$$f(\delta) = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n^\delta \text{中的唯一元素。}$$



图 3.1: 构造康托集的前 4 步

函数 f 将不可数集合 D 映入实数的子集:

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n。$$

后者即是所谓的**康托集**，参见图3.1。这样，只要再证明 f 是一一映射就行了。假设 $\alpha,\beta \in D$ 并且 $\alpha \neq \beta$。令 n 为使得 $\alpha(n) \neq \beta(n)$ 的最小自然数，不妨设 $\alpha(n)=0$ 而 $\beta(n)=1$，所以 $f(\alpha) \in LF_n^{\alpha}$，$f(\beta) \in RF_n^{\beta} = RF_n^{\alpha}$，而 $LF_n^{\alpha} \cap RF_n^{\alpha} = \emptyset$，所以 $f(\alpha) \neq f(\beta)$。 □

康托用对角线方法证明实数是不可数的，这实际上打开了对更高阶无穷研究的大门，也是集合论的真正开始。

3.7 习题

3.7.1. 证明：$x \subseteq S(x)$ 并且不存在 z，使得 $x \subset z \subset S(x)$。因此，不存在 $m, n \in \mathbb{N}$，$m < n < m+1$。

3.7.2. 证明后继函数 S 是 $\mathbb{N}$ 上的单射。由此证明，存在 $\mathbb{N}$ 到其真子集上的双射。

3.7.3. 令 $(A, \prec)$ 为非空线序集合，满足：

(1) 对每一 $p \in A$，存在 $q \in A$ 满足 $q \succ p$;

(2) A 的每一非空集合都有 $\prec$ 最小元;

(3) A 的每一有上界的非空子集都有 $\prec$ 最大元，

则 $(A, \prec)$ 与 $(\mathbb{N}, <)$ 同构。

3.7.4. 不用基础公理证明引理3.1.5（7），即，对任意自然数 n，$n \notin n$。

3.7.5. 证明除了加法交换律外的自然数上的加法和乘法的运算规律。

3.7.6. 证明对任意自然数 n，$n = \{m \in \mathbb{N} \mid m < n\}$。

3.7.7. 证明不存在函数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 满足对任意 $n \in \mathbb{N}$，$f(n) > f(n+1)$。

3.7.8. 对有限集合 A, 如果 $S \subseteq T$，则 $|A^S| \leq |A^T|$；特别地，如果 $n < m$，则 $|A^n| \leq |A^m|$。

3.7.9. 如果自然数的非空集合在序 $\leq$ 下有上界，那么它就有最大元。

3.7.10. 对任意集合 S 和函数 $g : S^{<\mathbb{N}} \to S$，存在唯一的序列 $f : \mathbb{N} \to S$ 满足：对所有的 $n \in \mathbb{N}$

$$f_n = g(f \upharpoonright n) = g(\langle f_0, \ldots, f_{n-1} \rangle)。$$

3.7.11. 对任意集合 X, Y, Z，

(1) $|X| = |X|$；

(2) $|X| = |Y| \to |Y| = |X|$；

(3) $|X| = |Y| \wedge |Y| = |Z| \to |X| = |Z|$。

3.7.12. 证明：

(1) 如果 $|A| \leq |B|$ 并且 $|A| = |C|$，那么 $|C| \leq |B|$；

(2) 如果 $|A| \leq |B|$ 并且 $|B| = |C|$，那么 $|A| \leq |C|$；

(3) $|A| \leq |A|$；

(4) 如果 $|A| \leq |B|$ 并且 $|B| \leq |C|$，那么 $|A| \leq |C|$。

3.7.13. 如果 X 是有穷的，并且 $Y \subseteq X$，则 Y 是有穷的。而且，$|Y| \leq |X|$。

3.7.14. 假设 X, Y 是有穷集合。

(1) $|f[X]| \leq |X|$;

(2) $X \cup Y$ 是有穷的;

(3) 如果所有 $S \in X$ 也是有穷的，则 $\bigcup X$ 是有穷的;

(4) $\mathcal{P}(X)$ 也是有穷的。

3.7.15. 证明推论3.3.10，即，

(1) 如果 $A_1, \cdots, A_n, \cdots$ 都是可数的，则 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ 是可数的;

(2) 如果 $A_1, \cdots, A_n$ 是可数的，则 $A_1 \times \cdots \times A_n$ 是可数的；特别地，对任意 $m > 0$，$\mathbb{N}^m$ 是可数的;

(3) 如果 A 是可数的，则 $A^{<\mathbb{N}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A^n$ 是可数的;

(4) 如果 A 是可数的，则 A 的所有有穷子集组成的集合

$$X = \{x \subseteq A \mid \text{存在 } n,\ |x| = n\}$$

是可数的。

3.7.16. 如果 x, y 是实数，则 $x + y = \{p + q \mid p \in x, q \in y\}$ 是戴德金分割，因此实数加法的定义是合适的。

3.7.17. 对每一函数 $x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，定义 x 的**支持**为集合

$$\{n \in \mathbb{N} \mid x(n) \neq 0\}\text{。}$$

令

$$A = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid x \text{ 有有穷支持}\}\text{。}$$

如果 $x, y \in A$ 并且 $x \neq y$，则存在最大的 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $x(n) \neq y(n)$。定义

$$x \prec_A y \quad \text{当且仅当} \quad x(n) < y(n)\text{。}$$

证明 $(A, \prec_A)$ 是良序。

3.7.18. 证明闭区间套定理3.6.1。

第四章　序数

"每一序数都是排在它之前的序数组成的集合。"这不是关于序数的一个已证命题，相反，这是给它们下的定义，……

冯·诺依曼

序数概念是对自然数的推广。每个自然数都是有穷序数，我们接下来要引进无穷序数。现在标准的序数定义源自冯·诺依曼，又称"冯·诺依曼序数"。

我们已经知道，每个有穷集合都存在一个自然数与其等势。如果要为每个集合，不管其是否有穷，找到一个与其等势的序数，我们必须构造一个双射，而这又要求每个集合都是"良序集"。不过，在本章我们会看到，选择公理等价于"每个集合都是良序集"。所以在 **ZFC** 下，每个集合都存在一个序数与其等势。

4.1 良序集

自然数集 $\mathbb{N}$ 以及每一个自然数 n 都以 $\in$ 为其上的良序。良序集最令我们感兴趣的性质是：任何两个良序集都可以比较势的大小。这就是本节要证明的主要定理。

4.1.1. **定义** 令 $(L,<)$ 为线序，S 是 L 的子集，如果对每一 $a \in S$，所有 L 中小于 a 的元素也都属于 S，就称 S 是 L 的**前段**。显然空集和 L 都是 L 的前段，不等于 L 的前段称为**真前段**。

对任意良序集 W，任意 $w\in W$，集合 $\{x\in W\mid x<w\}$ 都是 W 的前段。任何自然数都是 $\mathbb{N}$ 的一个前段；而且，每一自然数的前段是一个小于它的自然数。反过来，以下引理表明，对于良序集，任何真前段都可表示为以上形式的集合。

4.1.2. **引理** 如果 $(W,<)$ 是良序集并且 S 是 W 的真前段，则存在 $a\in W$，满足 $S=\{x\in W\mid x<a\}$。

证明. 令 $X=W-S$，则 X 是 W 的非空子集。令 a 为 X 的最小元。如果 $x<a$，则 $x\in S$；如果 $x\geq a$，则 $x\notin S$。所以 $x\in S$ 当且仅当 $x<a$。 □

今后，如果 $(W,<)$ 是良序集，$a\in W$，我们就称

$$W[a]=\{x\in W\mid x<a\} \tag{4.1}$$

为**由 a 给定的 W 的真前段**。如果 a 是 W 的最小元，则 $W[a]=\emptyset$。

4.1.3. **定义** 线序集 $(L,<)$ 到其自身的函数 f，如果满足 $x_1<x_2$ 蕴涵 $f(x_1)<f(x_2)$，就称 f 是**（严格）增函数**。注意，增函数是一一的，并且是 $(L,<)$ 到 $(\mathrm{ran}(f),<)$ 的同构。

4.1.4. **引理** 如果 $(W,<)$ 是良序集，$f:W\to W$ 是增函数，则对所有的 $x\in W$，都有 $f(x)\geq x$。

证明. 如果集合 $X=\{x\in W\mid f(x)<x\}$ 非空，则它有最小元，令其为 a。显然 $f(a)<a$，因此 $f(f(a))<f(a)$。所以 $f(a)\in X$，与 a 是 X 的最小元矛盾。 □

4.1.5. **推论**

(1) 没有良序集同构于自己的真前段；

(2) 任意良序集都只有一个自同构，即等同函数；

(3) 如果 W_1 和 W_2 是同构的良序集，则它们之间的同构是唯一的。

证明. (1) 对于良序集 W，令 $W[a]$ 为其真前段。如果 $f:W\to W[a]$ 是同构，则 $f(a)<a$，与引理4.1.4矛盾。

(2) 假设 $f: W \to W$ 是良序集 W 的自同构。根据引理4.1.4，对任意 $x \in W$，$f(x) \geq x$。但 f^{-1} 也是自同构，所以 $f^{-1}(x) \geq x$，则 $x = f(f^{-1}(x)) \geq f(x)$。这样，$x = f(x)$。

(3) 假设 f, g 都是 W_1 到 W_2 的同构映射，则 $h = g^{-1} \circ f$ 是 W_1 上的自同构。由 (2)，$h = \mathrm{id}_{W_1}$。所以 $f = g \circ h = g \circ \mathrm{id}_{W_1} = g$。

□

以下的定理具有根本的重要性，有时称为**良序集基本定理**。

4.1.6. **定理** 如果 $(W_1, <_1)$ 和 $(W_2, <_2)$ 为良序集，则以下条件恰有一个成立：

(1) W_1 与 W_2 同构；

(2) W_1 与 W_2 的前段同构；

(3) W_2 与 W_1 的前段同构。

证明. 定义 $f \subseteq W_1 \times W_2$，

$$f = \{(x, y) \in W_1 \times W_2 \mid W_1[x]\text{同构于}W_2[y]\}。 \tag{4.2}$$

首先，f 是一一函数：根据引理4.1.4，如果 $W_1[x_1]$ 和 $W_1[x_2]$ 都同构于 $W_2[y]$，则必有 $x_1 = x_2$。这就说明如果 $(x_1, y) \in f$，$(x_2, y) \in f$，则 $x_1 = x_2$，即 f 是函数；同理可证 f 是单射。

其次，$x <_1 x'$ 蕴涵 $f(x) <_2 f(x')$：如果 h 是 $W_1[x']$ 到 $W_2[f(x')]$ 的同构，则 $h \restriction W_1[x]$ 是到 $W_2[h(x)]$ 的同构，显然 $f(x) = h(x) <_2 f(x')$。这个推理同样证明了 $\mathrm{dom}(f)$ 是 W_1 的前段。因为如果 $x' \in \mathrm{dom} f$，而 $x <_1 x'$ 的话，则根据以上分析，x 也属于 $\mathrm{dom}(f)$。同样，由类似的论证，还可说明 $\mathrm{ran}(f)$ 也是 W_2 的前段。所以 f 是其定义域，W_1 的一个子集，到它的值域，W_2 的一个子集的同构。并且 $\mathrm{dom}(f)$ 是 W_1 的前段，$\mathrm{ran} f$ 是 W_2 的前段。因此我们可以考虑以下 3 种情况：

- 假设 $\mathrm{dom}(f) \neq W_1$，则 $\mathrm{dom}(f) = W_1[w]$ 是 W_1 的真前段。我们证明此时 $\mathrm{ran}(f) = W_2$，因此情况 (c) 成立。反设 $\mathrm{ran}(f) \neq W_2$，则存在 $w' \in W_2$，$\mathrm{ran}(f) = W_2[w']$。因此 f 是 $W_1[w]$ 与 $W_2[w']$ 同构。这样 $w \in \mathrm{dom} f = W_1[w]$，$w < w$，矛盾。

• 类似地，如果 $\mathrm{ran}(f) \neq W_2$，则 $\mathrm{ran} f$ 是 W_2 的真前段，且 $\mathrm{dom}(f) = W_1$；此时情况 (b) 成立。

• 如果以上情况都不成立，则 $\mathrm{dom}(f) = W_1$ 而 $\mathrm{ran}(f) = W_2$，f 是 W_1 到 W_2 的同构，情况 (a) 成立。

由推论4.1.5可知，3 种情况至多有一种成立。 □

下面的两个命题给出了两个良序集“相加”和“相乘”的直观。我们在下一节会看到，序数的加法和乘法恰好刻画了这样的直观。

4.1.7. **引理** *令 $(W_1, <_1)$ 和 $(W_2, <_2)$ 为良序集，并且 $W_1 \cap W_2 = \emptyset$，则如下定义的 $W = W_1 \cup W_2$ 上的关系 $<$ 是良序：*

$$\begin{aligned} u < v \quad \text{当且仅当} \quad & u, v \in W_1 \wedge u <_1 v \\ & \text{或者 } u, v \in W_2 \wedge u <_2 v \\ & \text{或者 } u \in W_1, v \in W_2\text{。} \end{aligned}$$

证明. $<$ 是线序易证。任取 $W' \subseteq W$ 为非空子集。如果 $W' \cap W_1$ 非空，则这个交是 W_1 的子集，它有 $<_1$ 最小元 w，易见 w 是 W' 的 $<$ 下的最小元。如果 $W' \cap W_1 = \emptyset$，则 $W' \subseteq W_2$，此时 W' 也有最小元。因此，$(W, <)$ 是良序集。 □

我们称良序集 $(W, <)$ 是 $(W_1, <_1)$ 和 $(W_2, <_2)$ 的**和**，一般记做 $(W_1, <_1) + (W_2, <_2)$，或者 $(W_1 \cup W_2, <_1 + <_2)$。

4.1.8. **引理** *令 $(W_1, <_1)$ 和 $(W_2, <_2)$ 为良序集，则如下定义的 $W = W_1 \times W_2$ 上的关系 $<$ 是良序：*

$$(u_1, u_2) < (v_1, v_2) \quad \text{当且仅当} \quad u_2 <_2 v_2 \text{ 或者 } u_2 = v_2 \text{ 并且 } u_1 <_1 v_1\text{。}$$

证明. $<$ 是线序的证明留给读者。如果 $W' \subseteq W_1 \times W_2$ 为非空子集，则 $\mathrm{ran}(W') \subseteq W_2$，因此有最小元 w_2。而 $\{w \mid (w, w_2) \in W'\}$ 是 W_1 的子集，令其最小元为 w_1，则 (w_1, w_2) 是 W' 的最小元。 □

我们称良序集 $(W, <)$ 是 $(W_1, <_1)$ 和 $(W_2, <_2)$ 的**积**，一般记做 $(W_1, <_1) \times (W_2, <_2)$，或者 $(W_1 \times W_2, <_1 \times <_2)$。

4.2 序数

两个同构的良序集称为具有相同的**序型**。这个定义与等势的定义类似，并没有指出集合的“势”是什么，“序型”是什么，只是给出了它们相等的条件。最直观的方法是将这两类对象看作等价类。例如，所有与 W 同构的良序集构成一个等价类 $[W]$，但是这里的困难在于 $[W]$ 不是集合，而是一个真类。解决的办法就是寻找一类良序集作为序型的代表，其他良序集的序型通过与标准的良序集比较得到。这之所以行得通是由于定理4.1.6，所有良序集都可比较大小。而这个标准的良序集就是将要定义的序数。

4.2.1. **定义** 如果集合 T 的元素都是它的子集，则 T 称为**传递的**。

4.2.2. **例**

(1) 根据引理3.1.5的 (2) 和 (8)，任何自然数 n 都是传递集；而且 $\mathbb{N}$ 也是传递集。请证明；

(2) 如果 T 是传递集，则 $T^+ = T \cup \{T\}$ 也是传递集。

4.2.3. **定义** 满足以下条件的集合 α 称为**序数**：

(1) α 是传递的；

(2) $\in$ 是 α 上的良序。

今后以小写希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 表示序数。对任意序数 α,β，$\alpha < \beta$ 定义为 $\alpha \in \beta$。

4.2.4. **例**

(1) 自然数集合 $\mathbb{N}$ 是序数。既然 $\mathbb{N}$ 是传递集，而根据定理3.1.10，$\in$ 是 $\mathbb{N}$ 上的良序，所以 $\mathbb{N}$ 是序数。**作为序数的 $\mathbb{N}$ 记为** ω，而且，任意自然数 n 都是序数。

(2) 如果 α 是序数，则 α^+ 也是序数（请证明）。

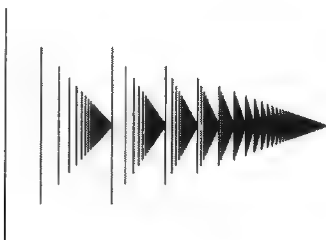


图 4.1: ω^2 的图示。每条线代表一个序数。第一条代表 ω，第二条代表 $\omega+1$。第二组的第一条代表 $\omega+\omega=\omega\cdot 2$，第二条代表 $\omega\cdot 2+1$，等等。(图片来自维基)

4.2.5. **定义** $\alpha+1=\alpha^+$，称为 α 的**后继**。如果 $\alpha=\beta+1$，就称 α 为**后继序数**；否则 α 称为**极限序数**。

显然，第一个极限序数是 ω，它也是第一个无穷序数。我们可以把全体序数的前段列举如下：

$$0,1,2,\cdots,\omega,\omega+1,\cdots,\omega+\omega,\omega+\omega+1,\cdots,\cdots,\omega\cdot\omega,\cdots,\cdots,\omega^\omega,\cdots$$

其中加法、乘法和幂运算会在后面定义。图4.1例示了这个序列的一个片段。接下来我们讨论序数的一些性质。

4.2.6. **引理** 如果 α 是序数，则 α 的所有元素是序数，所以 $\alpha=\{\beta\mid\beta<\alpha\wedge\beta\text{ 是序数}\}$。

证明. 首先，如果 $\beta\in\alpha$，则 β 是传递集。这是因为 α 传递的，所以 $\beta\subset\alpha$。如果 $x\in y\in\beta$，则 $y\in\alpha$，因此 $x\in\alpha$。于是 x,y,β 都是 α 的元素，而 $\in$ 是 α 的线序，故由传递性，$x\in\beta$，因此 β 是传递集。其次，β 是 α 的子集，所以 $\in$ 限制到 β 是 β 上的良序。 □

4.2.7. **引理** 如果 α 是序数，且 $B\subseteq\alpha$ 是传递集，则 B 是序数，且 $B\in\alpha$。特别地，对任意序数 α,β，如果 $\beta\subseteq\alpha$，则 $\beta\in\alpha$。

证明. 由于 B 是传递集，并且是良序集 α 的子集，因此 $\in$ 是其上的良序，所以 B 是序数。同样根据 B 的传递性，如果 $\gamma\in B$，$\delta\in\gamma$，则 $\delta\in B$，因此 B 是 α 的真前段。这样，存在 $\gamma\in\alpha$，$B=\{\delta\in\alpha\mid\delta\in\gamma\}$，而这就是说 $B=\gamma\in\alpha$。 □

4.2.8. **定理** 令 α,β 和 γ 为序数，

(1) 对任意非空的序数集合 X，$\bigcap X$ 是序数，并且 $\bigcap X = \inf(X)$；

(2) 对任意序数的集合 X，$\bigcup X$ 是序数，并且 $\bigcup X = \sup(X)$；

(3) 序数间的 $<$ 关系具有良序性质，因此任意非空的序数集合都在 $<$ 下是良序集。

(a) 传递性：如果 $\alpha < \beta$，$\beta < \gamma$，则 $\alpha < \gamma$；

(b) 反对称性：$\alpha < \beta$ 与 $\beta < \alpha$ 不能同时成立；

(c) 线性：$\alpha < \beta$，$\alpha = \beta$ 与 $\beta < \alpha$ 必有一个成立；

(d) 良基性：每一序数的非空集合有 $<$ 最小元；因此 $<$ 是每一序数的集合上的良序。

证明. (1) $\bigcap X$ 是传递集的交，因此是传递集；同时它是 X 中每个序数的子集，因此 $\in$ 是其上的良序，这就证明了 $\bigcap X$ 是序数。由于对任意 $\alpha \in X$，$\bigcap X \subseteq \alpha$，根据引理4.2.7，$\bigcap X \leq \alpha$。如果存在 β，对任意 $\alpha \in X$，$\beta \leq \alpha$，即，$\beta \subseteq \alpha$，则 $\beta \subseteq \bigcap X$，因此 $\beta \leq \bigcap X$。这就证明了 $\bigcap X$ 是 X 的下确界。

(2) 令 X 为序数的集合。$\bigcup X$ 为传递集合：$x \in y \in \bigcup X$ 蕴涵存在 $\alpha \in X$ 满足 $x \in y \in \alpha$，因此 $x \in \alpha$，所以 $x \in \bigcup X$。同时，由下面的 3，$\in$ 是 $\bigcup X$ 上的良序，所以 $\bigcup X$ 是序数，令 $\alpha = \bigcup X$，则对任意 $\beta \in X$，$\beta \subseteq \alpha$，所以 $\beta \leq \alpha$。显然，如果有 γ，对任意 $\beta \in X$，都有 $\beta \leq \gamma$，则 $\beta \subseteq \gamma$，所以 $\alpha \subseteq \gamma$，即 $\alpha \leq \gamma$。所以 α 是 X 的上确界。

(a) $\alpha \in \beta$ 并且 $\beta \in \gamma$，则由于 γ 是传递的，所以 $\alpha \in \gamma$；

(b) 假设 $\alpha \in \beta$ 而 $\beta \in \alpha$，则 $\alpha \in \alpha$，而这是不可能的。

(c) 假设 α 和 β 都是序数，则 $\alpha \cap \beta$ 也是序数；如果 $\alpha \cap \beta = \alpha$，则 $\alpha \subseteq \beta$，因此 $\alpha \in \beta$ 或 $\alpha = \beta$；类似地，如果 $\alpha \cap \beta = \beta$，也有 $\beta \in \alpha$ 或 $\beta = \alpha$。最后，$\alpha \cap \beta \subset \alpha$ 和 $\alpha \cap \beta \subset \beta$ 不可能同时成立，因为 $\alpha \cap \beta \in \alpha$ 并且 $\alpha \cap \beta \in \beta$ 蕴涵着 $\alpha \cap \beta \in \alpha \cap \beta$。

(d) 令 A 为一序数的集合，任取 $\alpha \in A$，考虑集合 $\alpha \cap A$。如果 $\alpha \cap A = \emptyset$，则 α 是 A 的最小元。否则，$\alpha \cap A$ 有 $\in$ 下的最小元 β，β 是 A 的最小元。

□

4.2.9. 定理 自然数恰好就是有穷序数。

证明. 自然数都是序数，且是有穷集合；反之，若 α 不是自然数，则 $\alpha \notin \mathbb{N}$，所以 $\alpha \geq \omega$，因此 $\omega \subseteq \alpha$，所以 α 是无穷的。 □

前面已经证明，对每一序数 α，

$$\alpha = \{\beta \mid \beta\text{是序数且}\beta < \alpha\}。 \tag{4.3}$$

因此，如果 $\alpha = \beta + 1$ 是后继序数，则 α 有最大元 β，而如果 α 是极限序数，则 α 无最大元，且 $\alpha = \sup\{\beta \mid \beta < \alpha\}$。

正如本节一开始所说的，以下定理表明，序数是“序型”的代表。

4.2.10. 定理 每一良序集同构于唯一的一个序数。

证明. 令 $(W, <)$ 为良序集。令 $A = \{a \in W \mid \text{ 存在序数 } \alpha, W[a] \text{ 同构于 } \alpha.\}$；由于两个不同的序数不可能同构，所以与 $W[a]$ 同构的序数是唯一的，我们表示为 α_a。

定义 $S = \{\alpha_a \mid a \in A\}$。根据替换公理 S 是集合，并且是序数的集合，因此以 $\in$ 为良序。假设 $\gamma \in \alpha_a \in S$，令 h 为 $W[a]$ 与 α_a 之间的同构，而 c 为 $h^{-1}(\gamma)$，则 $h \restriction c$ 是 $W[c]$ 与 γ 之间的同构，所以 $\gamma \in S$。这也就证明了 S 是一个序数。记 $S = \alpha$。

接下来我们证明 A 是 W 的前段。假设 $a \in A$ 且 $b < a$，令 h 为 $W[a]$ 与 α_a 之间的同构，则 $h \restriction W[b]$ 是 $W[b]$ 到 α_a 的前段 β 之间的同构，序数的前段是个序数，所以 $\beta = \alpha_b$。这就证明了 $b \in A$，而且 $\alpha_b < \alpha_a$。因此，或者 $A = W$ 或者存在 $c \in W$，$A = W[c]$。

现在定义函数 $f : A \to \alpha$ 为：$f(a) = \alpha_a$。显然 f 是 $(A, <)$ 到 α 的同构。如果 $A = W[c]$，则 $c \in A$，矛盾。所以 $A = W$，而 f 是 $(W, <)$ 到 α 的同构。 □

有了以上定理，我们可以定义：

4.2.11. 定义 假设 (X, R) 是良序集，则它的**序型**就是与其同构的唯一的序数，记作 $\mathrm{type}(X, R)$，或 $\mathrm{type}(X)$。

在下一章我们会看到，选择公理等价于命题“每个集合都是可良序化的”。所以在 **ZFC** 中，以上命题断言每个集合对应一个序数。离开选择公理，我们不能证明每个集合都是良序集，但是我们依然能够证明，对任意集合，总存在一个序数，该序数的势不小于给定集合的势。

4.2.12. **引理** *对任意集合 X，存在一个序数 $H(X)$，$H(X)$ 不与 X 的任何子集等势，并且是具有如此性质的最小序数。$H(X)$ 称为 X 的***哈特格斯数***(Hartogs number)。*

证明. 令 $W = \{w \subseteq X \mid w \text{ 上存在良序}\}$。由于 W 是 $\mathcal{P}(X)$ 的子集，并且 X 的任意有穷集合都属于 W，故 W 是非空集合。又由于每一良序集都存在唯一的序数与其同构，故根据替换公理，

$$H(X) = \{\alpha \mid \text{存在 } w \in W\text{，}\alpha \text{ 是与 } w \text{ 同构的唯一序数}\} \tag{4.4}$$

是序数的集合。由于若 $\alpha \in H(X)$ 且 $\beta < \alpha$，显然有 $\beta \in H(X)$，故 $H(X)$ 是序数。但 $H(X)$ 不与 X 的任何子集等势，否则就有 $H(X) \in H(X)$。而根据 $H(X)$ 的定义容易看出，$H(X)$ 是有此性质的最小序数。□

以上定理还表明，全体序数构成一个真类（见习题4.7.13），今后记作 **On**，$x \in \textbf{On}$ 表示“x 是序数”。

4.3 超穷归纳与递归

自然数上的归纳证明与递归定义是数学中强有力的工具。而定理4.2.9表明，序数是自然数的扩张。因此，将归纳和递归扩展到序数上是自然的事情。

4.3.1. **超穷归纳原理** *令 $\varphi(x)$ 为一个性质。假设对所有的序数 α，都有*

$$\text{如果对所有的 } \beta < \alpha \text{ 都有 } \varphi(\beta)\text{，那么 } \varphi(\alpha)\text{，} \tag{4.5}$$

那么 $\varphi(\alpha)$ 对所有的序数 α 都成立。

证明. 假设存在 γ 使得 $\varphi(\gamma)$ 不成立。令 $S = \{\beta \leq \gamma \mid \varphi(\beta)\text{不成立}\}$，则 S 有最小元 α。但因为 φ 对比 α 小的序数都成立，所以 $\varphi(\alpha)$ 成立，矛盾。□

4.3.2. 第二形式超穷归纳原理 令 $\varphi(x)$ 为一性质。假设：

(1) $\varphi(0)$ 成立；

(2) 对所有后继序数 α，$\varphi(\alpha)$ 蕴涵着 $\varphi(\alpha+1)$；

(3) 对所有极限序数 $\alpha \neq 0$，如果对所有 $\beta < \alpha$，$\varphi(\beta)$ 都成立，则 $\varphi(\alpha)$ 成立，

则对所有的 α 都有 $\varphi(\alpha)$。

在证明递归定理之前，我们先要把序列的定义推广到序数上。

4.3.3. 定义 定义域为序数 α 的函数称为长度为 α 的**序列**。

4.3.4. 注 虽然 **On** 是真类，但我们依然可以考虑定义域为 **On** 的序列，它是一个“函数” $\mathbf{F} : \mathbf{On} \to \mathbf{V}$。更一般地，如果存在一个公式 $\varphi(x, y)$ 满足

$$\forall x \exists! y \varphi(x, y), \tag{4.6}$$

定义类 $\mathbf{F}$ 为

$$\mathbf{F} = \{(x, y) \mid \varphi(x, y)\}, \tag{4.7}$$

则 $\mathbf{F}(x)$ 就是使得 $\varphi(x, y)$ 成立的唯一的 y，此时我们也会不严格地称 $\mathbf{F}$ 为函数。

4.3.5. 超穷递归定理 假设 $\mathbf{G} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ 为函数，则存在唯一的函数 $\mathbf{F} : \mathbf{On} \to \mathbf{V}$，它满足对任意序数 α，$\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F} \restriction \alpha)$。

证明. 证明与自然数上的递归定理十分类似。首先要定义**基于 G 的长度为 α 的近似**，即满足以下条件的序列 t:

(1) $\mathrm{dom}(t) = \alpha + 1$;

(2) 对所有的 $\beta \leq \alpha$，$t(\beta) = \mathbf{G}(t \restriction \beta)$。

为了定义 $\mathbf{F}$，我们令 $\varphi(x, y)$ 都表示如下性质:

$$\begin{cases} \text{如果 } x \text{ 是序数，} & \text{则存在基于 } \mathbf{G} \text{ 的长度为 } x \text{ 的近似 } t, y = t(x); \\ \text{如果 } x \text{ 不是序数，} & \text{则 } y = \emptyset\text{。} \end{cases}$$

并且令

$$\mathbf{F} = \{(x,y) \mid \varphi(x,y)\}。 \tag{4.8}$$

为了证明 $\mathbf{F}$ 是函数，就必须证明对任一 x，有唯一的 y 满足 $\varphi(x,y)$。如果 x 不是序数，这一点是显然的。如果 x 是序数，则我们用超穷归纳法证明：对任意 α，存在唯一的长度为 α 的近似。证明与自然数上的递归定理完全相似，只是你需要刚刚证明的超穷归纳，而不是自然数上的归纳。 □

在很多时候，我们进行递归定义时，需要用到参数，这样的递归定理可表述为：

> 令 $\mathbf{G}: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ 为函数，则存在运算 $\mathbf{F}: \mathbf{V} \times \mathbf{On} \to \mathbf{V}$ 满足：对所有的集合 z 和序数 α，
>
> $$\mathbf{F}(z,\alpha) = \mathbf{G}(\mathbf{F}_z \restriction \alpha)。 \tag{4.9}$$

当然，更为常用的递归定义方式是如下的这种形式：

> 令 $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \mathbf{G}_3$ 为 $\mathbf{V}$ 上的函数，则存在 $\mathbf{On}$ 上的函数 $\mathbf{F}$ 满足：
>
> $$\begin{aligned} \mathbf{F}(0) &= \mathbf{G}_1(\emptyset); \\ \mathbf{F}(\alpha+1) &= \mathbf{G}_2(\mathbf{F}(\alpha)); \\ \mathbf{F}(\alpha) &= \mathbf{G}_3(\mathbf{F} \restriction \alpha);\ \text{对所有的极限 } \alpha。 \end{aligned} \tag{4.10}$$

这两种形式的递归定理都可由一般递归定理容易地得到。

4.3.6. **练习** 证明以上带参数的递归定理 (4.10)。

4.3.7. **例** 利用序数和超穷递归，我们可以定义一个重要的类 $\mathbf{WF}$：

(1) $V_0 = \emptyset$;

(2) $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$;

(3) 对任意极限序数 λ，$V_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta$。

最后，令 $\mathbf{WF} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} V_\alpha$。你能分析以上定义中递归定理的使用吗？顺便要说的是，$\mathbf{WF}$ 表示的“良基（well-founded）集合”的类，是集合论公理系统一个极为自然的“模型”，我们会在本书后面仔细地讨论它。

4.4 序数算术

我们在 4.1 节定义了良序集的和与积。既然序数时良序集“序型”的刻画，那么序数上的运算也是对良序集的和与积的刻画。在本节中，我们首先运用递归定理来定义序数的运算，然后证明这样定义的运算正是良序集的和与积的表达。

4.4.1. **定义** *对所有序数* β,

(1) $\beta+0=\beta$；

(2) 对任意序数 α，$\beta+(\alpha+1)=(\beta+\alpha)+1$；

(3) 对任意不为 0 的极限序数 α，$\beta+\alpha=\sup\{\beta+\gamma \mid \gamma<\alpha\}$。

我们来看看在这里，递归定理是如何运用的：考虑函数

$$\mathbf{G}_1(z,x)=z, \mathbf{G}_2(z,x)=x+1, \mathbf{G}_3(z,x)=\begin{cases}\sup(\operatorname{ran}(x)), & \text{如果 } x \text{ 是函数;}\\ 0, & \text{否则。}\end{cases}$$

根据递归定理，(这里我们需要参数)，存在运算 $\mathbf{F}$，对任意 z:

$$\begin{cases}\mathbf{F}(z,0)=\mathbf{G}_1(z,0)=z;\\ \mathbf{F}(z,\alpha+1)=\mathbf{G}_2(z,\mathbf{F}_z(\alpha))=\mathbf{F}(z,\alpha)+1, \quad \text{对任意 } \alpha;\\ \mathbf{F}(z,\alpha)=\mathbf{G}_3(z,\mathbf{F}_z \restriction \alpha)=\sup\{\mathbf{F}(z,\gamma) \mid \gamma<\alpha\}, \text{对非 0 的极限序数 } \alpha。\end{cases}$$

4.4.2. **例**

(1) $(\beta+1)+1=\beta+2$, $(\beta+2)+1=\beta+3$;

(2) $\omega+\omega=\sup\{\omega+n \mid n<\omega\}$;

(3) 与此相对照，$m+\omega=\sup\{m+n \mid n<\omega\}=\omega$。因此，我们有 $\omega+m\neq m+\omega$！

(4) 由此，$1\neq 2$，但是 $1+\omega=2+\omega=\omega$。

如前所说，序数加法的集合论意义就是良序集的和，下面的定理证明了这一点。

4.4.3. **定理** 令 $(W_1, <_1), (W_2, <_2)$ 为良序集，分别与 α_1, α_2 同构。令 $(W, <) = (W_1 \cup W_2, <_1 + <_2)$ 是它们的和，则 $(W, <)$ 与 $\alpha_1 + \alpha_2$ 同构。

证明. 显然，$W = W_1 \cup W_2$ 而且 $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ 而且 W_1 的元素排在 W_2 之前。对 α_2 应用超穷归纳原理。

- 如果 $\alpha_2 = 0$，则 $W_2 = \emptyset$，$W = W_1$，而 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1$；

- 如果 $\alpha_2 = \beta + 1$，则 W_2 有最大元 a 而且 $W[a]$ 同构于 $\alpha_1 + \beta$。扩展这一同构就得到 W 与 $(\alpha_1 + \beta) + 1 = \alpha_1 + \alpha_2$ 的同构。

- 如果 α_2 是极限序数。对任意 $\beta < \alpha_2$，令 f_β 为 $W[a_\beta]$ 到 $\alpha_1 + \beta$ 的同构。令 $f = \bigcup_{\beta < \alpha_2} f_\beta$，因为 $\alpha_1 + \alpha_2 = \bigcup_{\beta < \alpha_2} (\alpha_1 + \beta)$，则 f 是 W 到 $\alpha_1 + \alpha_2$ 的同构。 □

4.4.4. **引理**

(1) 如果 α_1, α_2 和 β 是序数，则 $\beta + \alpha_1 < \beta + \alpha_2$ 当且仅当 $\alpha_1 < \alpha_2$；

(2) 对所有的序数 α_1, α_2 和 β，$\beta + \alpha_1 = \beta + \alpha_2$ 当且仅当 $\alpha_1 = \alpha_2$；

(3) 对所有的序数 α, β, γ，$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$。

证明. (1) 我们首先对 α_2 应用超穷归纳证明：$\alpha_1 < \alpha_2$ 蕴涵 $\beta + \alpha_1 < \beta + \alpha_2$。假设 $\alpha_1 < \alpha_2$，并且对任意 $\delta < \alpha_2$，$\alpha_1 < \delta$ 蕴涵着 $\beta + \alpha_1 < \beta + \delta$。如果 $\alpha_2 = \delta + 1$ 是后继序数，则 $\alpha_1 \leq \delta$，因此由归纳假设，$\beta + \alpha_1 \leq \beta + \delta < (\beta + \delta) + 1 = \beta + (\delta + 1) = \beta + \alpha_2$。如果 α_2 是极限序数，则 $\alpha_1 + 1 < \alpha_2$，所以 $\beta + \alpha_1 < (\beta + \alpha_1) + 1 = \beta + (\alpha_1 + 1) \leq \sup\{\beta + \delta \mid \delta < \alpha_2\} = \beta + \alpha_2$。反之，假设 $\beta + \alpha_1 < \beta + \alpha_2$。由于 $\alpha_2 \leq \alpha_1$ 蕴涵着 $\beta + \alpha_2 \leq \beta + \alpha_1$，所以此时只能有 $\alpha_1 < \alpha_2$。

(2) 由 (1) 可得。

(3) 见习题4.7.17。 □

以下定义序数的乘法。

4.4.5. **定义** 所有序数 β,

(1) $\beta \cdot 0 = 0$；

(2) 对任意序数 α，$\beta \cdot (\alpha + 1) = \beta \cdot \alpha + \beta$；

(3) 对任意不为 0 的极限序数 α，$\beta \cdot \alpha = \sup\{\beta \cdot \gamma \mid \gamma < \alpha\}$。

4.4.6. **例**

(1) $\beta \cdot 1 = \beta \cdot 0 + \beta = \beta$;

(2) $\beta \cdot 2 = \beta \cdot 1 + \beta = \beta + \beta$;

(3) $\beta \cdot \omega = \sup\{\beta \cdot n \mid n \in \omega\} = \sup\{\beta, \beta + \beta, \cdots\}$;

(4) $1 \cdot \alpha = \alpha$，但这并非显然，需要归纳证明。

(5) $2 \cdot \omega = \sup\{2 \cdot n \mid n \in \omega\} = \omega$，因此 $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$。

如同序数加法一样，序数乘法的集合论意义在于，如果 α_1, α_2 分别是 $(W_1, <_1)$ 和 $(W_2, <_2)$ 的序型，则 $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ 是 $(W_1, <_1) \times (W_2, <_2)$ 序型。

4.4.7. **定理** 对任意序数 α, β，序数 $\alpha \cdot \beta$ 与集合 $\alpha \times \beta$ 同构。

证明. 令 $\prec$ 是 $\alpha \times \beta$ 上的良序，定义 $f\colon (\alpha \times \beta, \prec) \to \alpha \cdot \beta$ 为：对 $\delta < \alpha$ 和 $\eta < \beta$，$f(\delta, \eta) = \alpha \cdot \eta + \delta$。$f$ 的定义域为 $\{\alpha \cdot \eta + \delta \mid \eta < \beta \wedge \delta < \alpha\} = \alpha \cdot \beta$。可以证明，$f$ 是同构。 □

最后，我们定义序数的幂。

4.4.8. **定义** 所有序数 β,

(1) $\beta^0 = 1$；

(2) 对任意序数 α，$\beta^{\alpha+1} = \beta^\alpha \cdot \beta$；

(3) 对任意不为 0 的极限序数 α，$\beta^\alpha = \sup\{\beta^\gamma \mid \gamma < \alpha\}$。

4.4.9. **例**

(1) $\beta^1=\beta$, $\beta^2=\beta\cdot\beta$;

(2) $\beta^\omega=\sup\{\beta^n \mid n\in\omega\}$，特别地，$1^\omega=1, 2^\omega=3^\omega=\omega$，对任意 $n\in\omega$，$n^\omega=\omega$。但是 $\omega^\omega=\sup\{\omega^n \mid n\in\omega\}>\omega$。

以下我们讨论序数算术的一些基本性质。

4.4.10. **引理** 对任意序数 α,β，

$$\alpha+\beta=\alpha\cup\{\alpha+\delta \mid \delta<\beta\}。$$

证明. 施归纳于 β。当 $\beta=0$ 时显然。如果 $\beta=\gamma+1$ 为后继序数，则

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\alpha+(\gamma+1)\\&=(\alpha+\gamma)+1\\&=\alpha+\gamma\cup\{\alpha+\gamma\}\\&=\alpha\cup\{\alpha+\delta \mid \delta<\gamma\}\cup\{\alpha+\gamma\}\\&=\alpha\cup\{\alpha+\delta \mid \delta<\beta\}。\end{aligned}$$

当 β 为极限序数时，

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=\bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha+\gamma)\\&=\bigcup_{\gamma<\beta}(\alpha\cup\{\alpha+\delta \mid \delta<\gamma\})\\&=\alpha\cup\bigcup_{\gamma<\beta}\{\alpha+\delta \mid \delta<\gamma\}\\&=\alpha\cup\{\alpha+\delta \mid \delta<\beta\}。\end{aligned}$$ □

4.4.11. **推论** 对任意序数 α,β，如果 $\alpha<\beta$，则存在唯一的序数 γ 使得 $\alpha+\gamma=\beta$。

证明. 令 $\mathbf{F}_\alpha(\gamma)=\alpha+\gamma$，则根据 4.4.4 (1)，$\mathbf{F}_\alpha$ 是"增函数"，所以总存在 δ 使得 $\mathbf{F}_\alpha(\delta)\notin\beta$，而对于这样的 δ，必有 $\beta\leq\alpha+\delta$。如果 $\beta=\alpha+\delta$，则命题已经得证。否则，根据以上引理以及 $\alpha<\beta$ 的假设，$\beta\in\{\alpha+\gamma \mid \gamma<\delta\}$，这样 β 就有所希望的形式了。 □

4.4.12. **引理** *对任意序数 α,β，*

$$\alpha\cdot\beta=\{\alpha\cdot\xi+\eta\mid\xi<\beta \text{ 并且 } \eta<\alpha\}。\tag{4.11}$$

证明. 施归纳于 β。 □

4.4.13. **推论** *对任意序数 α,β，$1\le\alpha<\beta$，存在唯一的序数的有序对 (ξ,η)，$\eta<\alpha$ 并且 $\beta=\alpha\cdot\xi+\eta$。*

证明. 存在性是由引理给定的。对于唯一性，不妨假设

$$\alpha\cdot\xi_1+\eta_1=\alpha\cdot\xi_2+\eta_2=\beta。\tag{4.12}$$

首先看到一定有 $\xi_1=\xi_2$，否则以上等式就不能成立（验证之），而如果 $\xi_1=\xi_2$，则根据加法运算的性质，$\eta_1=\eta_2$。 □

康托曾经证明，任意一个非 0 的序数 β，都可以唯一地表示为 ω 的“多项式”展开：

$$\beta=\omega^{\gamma_0}\cdot\delta_0+\cdots+\omega^{\gamma_{k-1}}\cdot\delta_{k-1}。\tag{4.13}$$

这个展开式称为β **的康托正则形式**。以下定理是这一结果的更为一般的形式。

4.4.14. **定理** *令 α,β 为序数，并且 $1<\alpha$ 而 $1\le\beta$，则 β 可以唯一地表示为以下形式：*

$$\beta=\alpha^{\gamma_0}\cdot\delta_0+\cdots+\alpha^{\gamma_{k-1}}\cdot\delta_{k-1},\tag{4.14}$$

其中 $k\in\omega$，δ_i 和 γ_i 都是序数，并且 $\gamma_0>\cdots>\gamma_{k-1}$。

证明. 施归纳于 β。$\beta=1$ 时显然。假设 $\beta>1$ 并且对任意 $\eta<\beta$，η 都有以上展开式。定义 $\Gamma=\{\gamma\mid\alpha^\gamma\le\beta\}$。以下证明 Γ 有最大元。否则的话，令 $\gamma_0=\bigcup\Gamma$，则 γ_0 为极限序数并且 $\gamma_0\notin\Gamma$。但是

$$\alpha^{\gamma_0}=\bigcup\{\alpha^\gamma\mid\gamma<\gamma_0\}=\bigcup\{\alpha^\gamma\mid\gamma\in\Gamma\}\subseteq\beta,$$

这样就有 $\alpha^{\gamma_0}\le\beta$，从而 $\gamma_0\in\Gamma$，矛盾。现在令 γ_0 为 Γ 的最大元，则根据以上推论，存在 β_1 使得 $\beta=\alpha^{\gamma_0}+\beta_1$，其中 $\delta_0<\alpha$。如果 $\beta_1=0$，则已有结果。若 $\beta_1>0$，则由归纳假设，$\beta_1=\alpha^{\gamma_1}\cdot\delta_1+\cdots+\alpha^{\gamma_{k-1}}\cdot\delta_{k-1}$，同样得到 β 的展开式，这就证明了存在性。唯一性见习题 4.7.22。 □

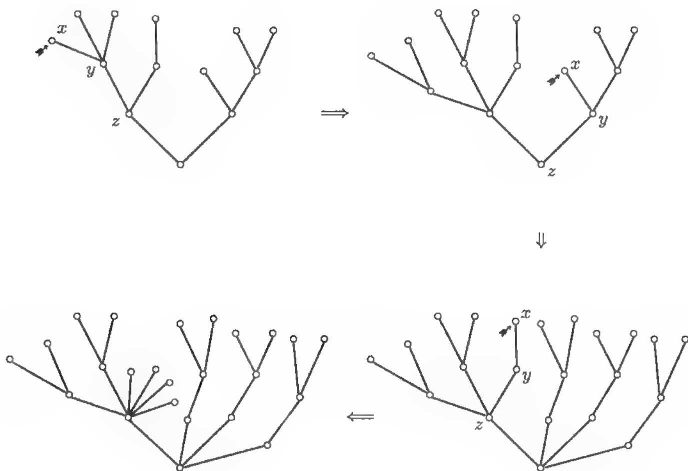


图 4.2: 九头蛇博弈。大力神赫拉克勒斯（Hercules）是古希腊的英雄，他与九头蛇（Hydra）之间的战争是这样一场游戏：在第 n 步，英雄砍掉蛇的一个头，实际上是图中分叉树的一个**顶部**节点 x，如果把与 x 相联的节点记作 y，与 y 相联的下一层节点（向根部的方向）记作 z，则蛇会把 z 以上与 y 相联的（除了 x）部分复制 n 遍。问题是：英雄是否有策略能把蛇的头最终砍光？答案是：不管怎样砍，英雄都会获得最终的胜利。

4.5 古德斯坦定理

接下来我们讨论无穷序数算术在数论中的一个应用。图4.2讲述了著名的“九头蛇”博弈。实际上它例示了所谓的“古德斯坦定理”。本节尝试用超穷序数的理论来证明这一定理。首先每个自然数都可展开为一个“标准”的形式，如：

$$27 = 2^4 + 2^3 + 2^1 + 2^0,$$

这被称作 27 的以 2 为底的展开式。但是其中还有 4 和 3，如果进一步展开，则得到：

$$27 = 2^{(2^2)} + 2^{(2^1+1)} + 2^1 + 2^0。$$

这称作 27 的以 2 为“超底 (superbase)”的展开式。以下我们递归定义一个自然数上的函数 $S_n:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，对任意 k，$S_n(k)$ 表示 k 的以 n 为底的展开式，但是将其中的 n 替换为 $n+1$:

4.5.1. 定义 对任意自然数 $n\geq 2$，S_n 是如下定义的函数：

$$
\begin{aligned}
S_n(m) &= m, && \text{若 } m<n,\\
S_n(m) &= k\cdot(n+1)^{S_n(t)}+S_n(b), && \text{若 } m\geq n \text{ 并且}\\
& && m=k\cdot n^t+b, k<n, b<n^t, t\geq 1\text{。}
\end{aligned}
$$

4.5.2. 例 我们来计算 $S_2(89)$:

$$
\begin{aligned}
S_2(89) &= S_2(2^6+25)=(2+1)^{S_2(6)}+S_2(25)\\
&= 3^{S_2(2^2+2)}+S_2(2^4+9)=3^{(2+1)^{S_2(2)}+S_2(2)}+3^{S_2(4)}+S_2(9)\\
&= 3^{3^3+3}+3^{3^3}+S_2(2^3+1)=3^{30}+3^{27}+3^{S_2(3)}+1\\
&= 3^{30}+3^{27}+3^{S_2(2+1)}+1=3^{30}+3^{27}+3^4+1\\
&= 205891132094649+7625597484987+81+1\\
&= 213516729579718\text{。}
\end{aligned}
$$

4.5.3. 练习 尝试计算一下 $S_3(64)$。

由函数 S_n 可定义一个新的函数 f_n，它将 m 的展开式的底换为 ω:

4.5.4. 定义 对任意自然数 $n\geq 2$，f_n 是如下定义的函数：

$$
\begin{aligned}
f_n(k) &= k, && \text{若} k<n,\\
f_n(m) &= \omega^{f_n(t)}\cdot k+f_n(b), && \text{若 } m\geq n \text{ 并且}\\
& && m=k\cdot n^t+b, (k<n, b<n^t, t\geq 1)\text{。}
\end{aligned}
$$

可以证明 f_n 是严格增函数。

4.5.5. 引理

(1) f_n 是增函数，即 $k<m$ 蕴涵 $f_n(k)<f_n(m)$；

(2) 对任意自然数 n, m，$n \geq 2$，$f_{n+1}(S_n(m)) = f_n(m)$。

证明. (1) 如果 $n \geq k$，则命题显然成立。假设 $n < k < m$，

$$k = x \cdot n^s + a, \qquad m = y \cdot n^t + b。$$

我们对 m 做归纳。假设对小于 m 的自然数，命题已经成立。由于 $k < m$，所以 $s < t$ 或者 $s = t \wedge x < y$ 或者 $s = t \wedge x = y \wedge a < b$。无论哪种情况都可由归纳假设得 $f_n(k) < f_n(m)$。

(2) 对 m 做归纳。如果 $m \leq n$，命题显然成立；假设 $m > n$ 并且对所有小于 m 的自然数命题已经成立，同时假设 $m = k \cdot n^t + b$，则

$$\begin{aligned} f_{n+1}(S_n(m)) &= f_{n+1}(k \cdot (n+1)^{S_n(t)} + S_n(b)) \\ &= \omega^{f_{n+1}(S_n(t))} \cdot k + f_{n+1}(S_n(b)) \\ &= \omega^{f_n(t)} \cdot k + f_n(b) \\ &= f_n(m)。 \end{aligned}$$

□

4.5.6. **定义** 对任意自然数 $n \geq 1$，g_n 是如下定义的函数：

$$g_1(m) = m;$$

$$g_{n+1}(m) = \begin{cases} S_{n+1}(g_n(m)) - 1, & \text{若} g_n(m) > 0; \\ 0, & \text{否则。} \end{cases}$$

序列 $\langle g_n(m) \rangle_{1 \leq n < \omega}$ 在最初增长的很快，例如：

$g_1(13) = 13;$ $\qquad 13 = 2^3 + 2^2 + 1 = 2^{2+1} + 2^2 + 1,$

$\qquad S_2(13) = 3^4 + 3^3 + 1 = 109;$

$g_2(13) = 108;$ $\qquad 108 = 3^4 + 3^3,$

$\qquad S_3(108) = 4^5 + 4^4 = 1280;$

$g_3(13) = 1279;$ $\qquad 1279 = 4^{4+1} + 3 \cdot 4^3 + 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 3,$

$\qquad S_4(1279) = 5^6 + 3 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 3$

$\qquad = 16093;$

$g_4(13) = 16092;$ $\qquad \cdots;$

$g_5(13) = 280711;$ $\qquad \cdots;$

$g_6(13) = 5765998;$ $\qquad \cdots;$

$g_7(13) = 134219591;$ $\qquad \cdots;$

$g_8(13) = 3486786855;$ $\qquad \cdots;$

$g_9(13) = 100000003325;$ $\qquad \cdots$。

但是古德斯坦定理断言，这一序列最终会收敛于 0:

4.5.7. **古德斯坦定理** *对任意 m，存在 $n \geq 1$ 使得 $g_n(m) = 0$。*

证明. 令 m 为自然数，考虑序列 $\langle f_{n+1}(g_n(m))\rangle_{1\leq n<\omega}$。如果 $g_{n+1}(m) > 0$，则根据定义，我们有

$$f_{n+2}(g_{n+1}(m)) = f_{n+2}(S_{n+1}(g_n(m)) - 1)。$$

由引理4.5.5（1）可得:

$$f_{n+2}(S_{n+1}(g_n(m)) - 1) < f_{n+2}(S_{n+1}(g_n(m)))。$$

而由引理4.5.5（2）可得:

$$f_{n+2}(S_{n+1}(g_n(m))) = f_{n+1}(g_n(m))。$$

因此

$$f_{n+2}(g_{n+1}(m)) < f_{n+1}(g_n(m))。$$

由于不存在序数的无穷下降链，故对于足够大的自然数 n，我们会得到 $g_n(m) = 0$。 □

证明于 1944 年的古德斯坦定理只涉及自然数，数学家们曾一度想寻找一个“初等”的证明，即不用超穷序数。但是到 1982 年，科尔比（L. Kirby）和帕里斯（J. Paris）证明古德斯坦定理不能在皮亚诺（Peano）算术中得证。这一现象充分说明了集合论的超穷数理论对一般数学的重要意义。

4.6 选择公理

选择公理曾经是最有争议的数学命题。这主要是因为一方面，数学中很多基本定理离开选择公理不能证明，一个典型的例子是初版于 1930 年的范·德·瓦尔登（van der Waerden）的名著《近世代数》(*Modern Algebra*)，作者在同事的压力下从第二版中删去了选择公理及其所有的推论，这遭到了代数学家们的激烈反对，迫使他在 1950 年的第三版中又把选择公理及其推论都加了回去，所以摩尔（G. E. Moore）评论说：“代数学家们坚持认为这个公理对他们的学科变得必不可少。”[①] 而另一方面，选择公理有着

[①] G. E. Moore，*The Axiom of Choice*，235 页。又见麦蒂（Pen Maddy）*Believing the Axioms*，9 页。

一些异乎寻常的推论，著名的如实数上存在一个良序，以及塔斯基-巴拿赫（Tarski-Banach）分球定理。所有，有人总结这种分裂状态到："选择公理显然为真，良序定理显然为假；佐恩（Zorn）引理只有天知道。"[1]不过，关于选择公理的争论似乎已经过去，目前大多数数学家都会接受它为一条基本的数学公理。这使得那些研究在数学证明中是否可以避免使用选择公理的工作变得无足轻重了。正如马丁（Donald Martin）所说："在很多情况下，我们看起来不能定义一个特定集合的选择函数，但这与选择函数是否存在的问题毫不相干。一旦避免了这种混淆，选择公理就是集合论公理中最没有问题的一个。"[2]

为了讨论选择公理，本节总是在 **ZF** 中进行证明。

4.6.1. **定理** *以下命题等价:*

(1) *对任意非空集合的族* $(X_i)_{i\in I}$，$\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$；

(2) *对任意非空集合的族* $(X_i)_{i\in I}$，*如果* $i\neq j$ *蕴涵* $X_i\cap X_j=\emptyset$，*则存在集合* S，*对每一* $i\in I$，$|S\cap X_i|=1$；

(3) *对任意非空集合的族* $(X_i)_{i\in I}$，*存在函数* f，*它满足对每一* $i\in I$，$f(X_i)\in X_i$，*其中* f *称为选择函数*；

(4) **（良序定理）** *每一集合上都存在一个良序。*

证明.　(1)⇒(2)。 取 $g\in\prod_{i\in I} X_i$，则 $S=\mathrm{ran}(g)$ 满足要求。

(2)⇒(3)。 令 $Y_i=\{i\}\times X_i$，则 $(Y_i)_{i\in I}$ 两两不交。令 S 为满足对每一 Y_i，$|Y_i\cap S|=1$ 的集合，则 S 为一函数，取 $f(X_i)=S(i)$，则 f 为所求函数。

(3)⇒(4)。 对任意集合 X，令 f 为 $\mathcal{P}(X)-\{\emptyset\}$ 上的选择函数。递归定义函数 H 为:

$$H(\alpha)=f(X-H[\alpha]),\text{如果}X-H[\alpha]\neq\emptyset。$$

显然，H 是单射。由引理，存在序数 δ 小于或等于 X 的哈特格斯数，$\mathrm{dom}(H)=\delta$。同样，H 是满射，否则 $X-H[\delta]$ 不空，则 $\delta\in\delta$，同样矛盾。这样，H 就引导出 X 上的一个良序。

[1] E. Schechter, *Handbook of Analysis and its Foundation*. Acad. Press, 1997. 145 页。
[2] Donald Martin, Sets versus classes, 内部交流稿, 1-2 页。

(4)⇒(1)。 令 $X=\bigcup_{i\in I}X_i$，则 X 上存在良序，并且每一 X_i 都是 X 的非空子集。定义 $f:I\to X$ 为：$f(i)=X_i$的最小元，则 $f\in\prod_{i\in I}X_i$，故后者不空。

□

在集合论的文献中，以上定理中的四个命题都可以称作选择公理，虽然 (4) 更多时候被称为良序定理。今后我们以 **AC** 表示选择公理。在提到选择公理时，可能指的是以上命题中的任意一个。在需要区分时，则以 $\mathbf{AC}_1,\mathbf{AC}_2,\mathbf{AC}_3$ 和 **WO** 表示之。以下我们证明在数学中更为常用的几种选择公理的等价形式。

4.6.2. 定理 *以下命题等价：*

(1) **AC**；

(2) (**豪斯道夫极大链条件**) *任何偏序集都存在一个极大链*；

(3) (**佐恩引理**) *如果偏序集 X 的每个链都有上界，则 X 有极大元。*

证明. (1)⇒(2)。 令 X 为一偏序集。根据 **AC**，存在 f 是 $\mathcal{P}(X)-\{\emptyset\}$ 上的选择函数。定义：

$$H(\alpha)=f(\{x\in X-H[\alpha]\mid H[\alpha]\cup x\text{ 是 }X\text{ 的链}\})。$$

容易证明 H 是单射，所以存在 δ 小于等于 X 的哈特格斯数，$\mathrm{dom}(H)=\delta$。而 H 的值域 $\mathrm{ran}(H)$ 是 X 的极大链，否则 $\delta\in\delta$，矛盾。

(2)⇒(3)。 由 (2)，存在 X 的极大链 C，而 C 的上界就是 X 的极大元。

(3)⇒(1)。 我们证明 (3) 蕴涵 $\mathbf{AC}_3$。令 X 为非空集合的族，定义

$$Z=\{g\mid\text{存在 }Y\subseteq X,\ g\text{ 是 }Y\text{ 上的选择函数}\}。$$

注意到 $Z\neq\emptyset$，例如，对任意 $X_i\in X$，$x\in X_i$，$g=\{(X_i,x)\}\in Z$。并且，$\subseteq$ 是 Z 上的偏序。取 C 是 Z 的链，则 C 是相容的函数系统，所以 $\bigcup C$ 也是 X 的某个子集上的选择函数，故 $\bigcup C\in Z$，且是 C 的上界。这样，佐恩引理的条件得到满足，故 Z 有极大元，令其为 f。以下只需证明 $\mathrm{dom}(f)=X$。否则，存在 $X_i\in X-\mathrm{dom}(F)$，存在 $x\in X_i$，使得 $f\cup\{(X_i,x)\}\in Z$，与 f 是 Z 的极大元矛盾。

□

以下举一些例子说明选择公理在数学中的影响。

吉洪诺夫（Tychonoff）定理是拓扑学中的一个重要定理，我们以下证明它是与选择公理等价的命题。首先我们回忆一些基本概念。

任意集合 X 上的一个**拓扑** $\mathcal{T}$ 是 X 的一个子集族，它满足：

(1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ 并且 $X \in \mathcal{T}$；

(2) $\mathcal{T}$ 中任意元素的并仍属于 $\mathcal{T}$；

(3) $\mathcal{T}$ 中有限元素的交仍属于 $\mathcal{T}$。

一个指定了拓扑的集合 X 称为**拓扑空间**，通常以 $(X,\mathcal{T})$ 表示以 $\mathcal{T}$ 为拓扑的空间。$\mathcal{T}$ 的元素称为**开集**。开集的补集称为**闭集**。对任意集合 $Y \subseteq X$，$\mathrm{cl}(Y)$ 表示包含 Y 的最小闭集，称为 Y 的**闭包**。而 $\mathrm{int}(Y)$ 表示 Y 所包含的最大开集，称为 Y 的**内部**。

拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的开集族 $\mathcal{B}$ 如果满足：任意开集 $U \in \mathcal{T}$ 都可表示为 $\mathcal{B}$ 中元素的并，则称 $\mathcal{B}$ 为拓扑 $\mathcal{T}$ 的**基**。X 的子集族 $\mathcal{B}$ 是一个拓扑基的充分必要条件是：(i) 对任意 $x \in X$，存在 $B \in \mathcal{B}$ 使得 $x \in B$，即 $\bigcup\mathcal{B} = X$；(ii) 如果 $x \in B_1 \cap B_2$，其中 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$，则存在 $B_3 \in \mathcal{B}$，使得 $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$，或者，等价地，$\mathcal{B}$ 中任意两个元素的交都可表示为 $\mathcal{B}$ 中元素的并。一个拓扑空间称为**第二可数的**，如果它有一个可数的基。

拓扑空间 $(X,\mathcal{T})$ 的开集族 $\mathcal{S}$ 如果满足：$\mathcal{S}$ 中元素有穷交的集合

$$\left\{\bigcap_{i=0}^{n} S_i \mid S_i \in \mathcal{S} \land n \in \mathbb{N}\right\} \tag{4.15}$$

是 $\mathcal{T}$ 的基，就称 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{T}$ 的**子基**。对集合 X 的任意子集族 $\mathcal{S}$，存在一个包含 $\mathcal{S}$ 的最小的拓扑 $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$，称为 $\mathcal{S}$ **生成的拓扑**。$\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ 中元素都可表示为 $\mathcal{S}$ 中元素的有穷交的并，即 $\mathcal{S}$ 是这个拓扑的一个子基。

对任意拓扑空间 X, Y，如果映射 $f : X \to Y$ 满足任意开集的逆象也是开集，就称 f 是**连续的**。如果 f 满足每个开集（闭集）的象也是开集（闭集），就称 f 是**开的（闭的）**。一个开的连续函数也称为**双连续的**。一个双连续的双射称为**同胚**。同胚保持所有的拓扑性质，亦即，两个同胚的拓扑空间在拓扑学的意义上是同一个空间。

令 $(X_i)_{i\in I}$ 为拓扑空间的族，令 $X = \prod_{i\in I} X_i$。定义 $\mathcal{S}_i = \{p_i^{-1}[U_i] \mid U_i \in \mathcal{T}_i\}$，其中 $p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ 是投射函数，$\mathcal{T}_i$ 是 X_i 上

的拓扑。取 $\mathcal{S} = \bigcup_{i\in I}\mathcal{S}_i$，则以 $\mathcal{S}$ 为子基，或者说，由这个 $\mathcal{S}$ 生成的拓扑 $\mathcal{T}$ 称为**积拓扑**，给定了这个拓扑的 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 称为**积空间**。显然，积拓扑使得每个投射函数都是连续函数，它是满足此一性质的最小的拓扑。另外，集合族

$$\mathcal{B} = \left\{\prod_{i\in I} U_i \mid U_i \in \mathcal{T}_i \wedge \text{只有有穷个} U_i \neq X_i\right\} \tag{4.16}$$

是积拓扑的一个基。

令 (X,τ) 为拓扑空间，如果 $\mathcal{C}$ 为 X 的子集族并且 $\bigcup\mathcal{C} = X$，就称 $\mathcal{C}$ 为 X 的**覆盖**；如果 $\mathcal{C}$ 是覆盖并且 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{T}$，则称 $\mathcal{C}$ 是**开覆盖**。如果覆盖 $\mathcal{C}$ 的某个子族 $\mathcal{C}_0$ 也是 X 的覆盖，则称 $\mathcal{C}_0$ 是 $\mathcal{C}$ 的**子覆盖**。

一个拓扑空间 X 是**紧致的**当且仅当 X 的每个开覆盖都有有穷子覆盖。

4.6.3. **引理** *一个拓扑空间是紧致的当且仅当对任意 X 的闭集族 $\mathcal{C}$，如果 $\mathcal{C}$ 有有穷交性质，则 $\bigcap\mathcal{C} \neq \emptyset$。*

证明. 若 X 是紧致空间，$\mathcal{C}$ 是 X 上的有有穷交性质的闭集族，则 $\mathcal{C}^* = \{X - C \mid C \in \mathcal{C}\}$ 是 X 上的开集族。对 $\mathcal{C}$ 的任意有穷子集 $\mathcal{C}_0$，由于 $\bigcap\mathcal{C}_0 \neq \emptyset$，所以相应地 $\bigcup\mathcal{C}_0^* \neq X$。这就是说 $\mathcal{C}^*$ 没有有穷子覆盖，故 $\mathcal{C}^*$ 不能覆盖 X，即 $\bigcup\mathcal{C}^* \neq X$，而这等价于 $\bigcap\mathcal{C} \neq \emptyset$。反之，设 $\mathcal{U}$ 是 X 的开覆盖，则对相应的闭集族 $\mathcal{U}^*$，$\bigcap\mathcal{U}^* = \emptyset$，因此 $\mathcal{U}^*$ 不能有有穷交性质，即存在 $\mathcal{U}^*$ 的有穷子集 $\mathcal{U}_0^*$，$\bigcap\mathcal{U}_0^* = \emptyset$，而这就是说 $\bigcup\mathcal{U}_0 = X$，即 $\mathcal{U}_0$ 是 $\mathcal{U}$ 的有穷子覆盖。故 X 是紧致空间。 □

4.6.4. **定理** *以下命题等价：*

(1) **AC**；

(2) (**吉洪诺夫定理**) *任意紧致拓扑空间的积空间还是紧致的。*

证明. (1)⇒(2)。令 $(X_i)_{i\in I}$ 为拓扑空间的族，令 $X = \prod_{i\in I} X_i$ 为积空间。要证 X 是紧致空间，根据引理，只需证明对 X 的任意有有穷交性质的闭集族 $\mathcal{C}$，都有 $\bigcap\mathcal{C} \neq \emptyset$。由于 $\mathcal{C}$ 有有穷交性质，故它能生成一个 X 上的滤 $\mathcal{F}$，① 又根据超滤存在定理6.1.11，不妨设 $\mathcal{F}$ 为超滤。取 $\mathcal{C}_i = \{\mathrm{cl}(p_i[F]) \mid F \in \mathcal{F}\}$，则 $\mathcal{C}_i$ 是 X_i 上的闭集族。以下证明

① 滤的概念请参见第六章。

$$\text{对任意 } i \in I\text{，}\mathcal{C}_i \text{ 有有穷交性质，因此 } \bigcap \mathcal{C}_i \neq \emptyset\text{。}$$

令 $\{C_1, C_2, \cdots, C_n\}$ 为 $\mathcal{C}_i$ 的有穷子集。令 $F_j \in \mathcal{F}$ 为满足 $C_j = p_i(F_j)$ 的元素，则显然 $\bigcap_{j=1}^n F_j \neq \emptyset$，取 a 为其中的元素，则 $p_i(a) \in \bigcap_{j=1}^n C_j$，即 $\bigcap_{j=1}^n C_j \neq \emptyset$。

利用选择公理，取 $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in I} \in X$ 使得对每一 $i \in I$，$x_i \in \bigcap \mathcal{C}_i$。以下证明

$$\mathbf{x} \in \bigcap \mathcal{C}\text{，因此 } \bigcap \mathcal{C} \neq \emptyset\text{，因此 } X \text{ 是紧致空间。}$$

反设 $\mathbf{x} \notin \bigcap \mathcal{C}$，则存在 $C \in \mathcal{C}$，$\mathbf{x} \notin C$。由于 C 是闭集，所以存在 X 的基本开集 B，$\mathbf{x} \in B$ 并且 $C \cap B = \emptyset$。而每个基本开集都是有穷个子基中元素的交，由 X 上拓扑的定义，$B = \bigcap_{l \in K} p_l^{-1}[U_l]$，其中 $U_l \in \mathcal{T}_l$，K 是 I 的有穷子集。注意，由于 $\mathbf{x} \in B$，我们有对任意 $l \in K$，$x_l \in U_l$。显然，$B \notin \mathcal{F}$，因此存在 $k \in K$，$p_k^{-1}[U_k] \notin \mathcal{F}$。令 $\overline{U}_k = X_k - U_k$ 为 U_k 在 X_k 中的补集，因为 $\mathcal{F}$ 是超滤，故 $p_k^{-1}[\overline{U}_k] \in \mathcal{F}$。根据 $\mathcal{C}_k$ 的定义，$\overline{U}_k = \mathrm{cl}(p_k[p_k^{-1}[\overline{U}_k]]) \in \mathcal{C}_k$。又由于 $x_k \in U_k$，故 $x_k \notin \overline{U}_k$，因此 $x_k \notin \bigcap \mathcal{C}_k$，与我们对 $\mathbf{x}$ 的选取矛盾。

(2)$\Rightarrow$(1)。我们证明吉洪诺夫定理蕴涵 $\mathbf{AC}_1$。任取非空集合族 $(X_i)_{i \in I}$。令 $*$ 为不属于任何 X_i 的一个集合，令 $Y_i = X_i \cup \{*\}$。取 $\mathcal{T}_i = \{\emptyset, \{*\}, Y_i\}$ 为 Y_i 的子集族，则 $\mathcal{T}_i$ 是 Y_i 上的拓扑。并且，Y_i 在这个拓扑下显然是紧致空间。根据吉洪诺夫定理，$Y = \prod_{i \in I} Y_i$ 是紧致空间。对任意 $i \in I$，令 $\mathcal{A} = \{A_i \mid \text{对任意} i \in I,\ A_i = p_i^{-1}[X_i]\}$，则 $\mathcal{A}$ 是 Y 的非空闭集的族。显然，$\mathbf{x} \in A_i$ 当且仅当 $x_i \in X_i$。而有穷个 X_i 的卡氏积总是非空，故 $\mathcal{A}$ 有有穷交性质。由 Y 是紧致空间，$\bigcap \mathcal{A} \neq \emptyset$。可是 $\bigcap \mathcal{A} = \prod_{i \in I} X_i$。 □

另一个例子来自实分析，讨论中我们只考虑实数 $\mathbb{R}$，虽然所有结果也适用于 $\mathbb{R}^n$。$\mathbb{R}$ 的每个区间都有一个长度，而所谓测度是对长度概念的推广，以适用于更复杂的 $\mathbb{R}$ 的子集。抽象地说，长度是从所有区间的族 $\mathcal{I}$ 到 $\mathbb{R}$ 中的一个函数 $l : \mathcal{I} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，若 $I = [a, b]$，则 $l(I) = b - a$。l 满足以下条件：

(1)　$l(\emptyset) = 0$;　$l(\mathbb{R}) = \infty$;

(2)　可数可加性：对任意可数个区间的族 $(I_i)_{i \in \omega}$，$l(\bigcup_{i \in \omega} I_n) = \sum_{i \in \omega} l(I_n)$;

(3) 平移不变性：若 $a \in \mathbb{R}$ 且 $I \subset \mathbb{R}$，则 $l(I+a) = l(I)$，其中 $I+a = \{x+a \mid x \in I\}$。

对以上分析进行推广，我们希望一个测度是定义在实数的所有子集上的函数：$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$，并且满足：

(1) 若 $I \subset \mathbb{R}$ 是区间，则 $\mu(I) = l(I)$；

(2) $\mu(\emptyset) = 0$; $\mu(\mathbb{R}) = \infty$;

(3) 可数可加性：对任意可数个子集的族 $(X_i)_{i\in\omega}$，$\mu(\bigcup_{i\in\omega} X_n) = \sum_{i\in\omega} \mu(X_n)$;

(4) 平移不变性：若 $a \in \mathbb{R}$ 且 $X \subset \mathbb{R}$，则 $\mu(X+a) = \mu(X)$。

事实上，在选择公理下，满足以上所有条件的测度是不存在的。

下面我们引进数学分析中的勒贝格测度 μ，它满足条件 (1) - (4)，由选择公理可以证明，μ 的定义域不是 $\mathcal{P}(\mathbb{R})$。

4.6.5. **定义** 所谓**外测度**是如下定义的函数：$\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$：

$$\mu^*(X) = \inf\left\{\sum_{i\geq 1} l(I_i) \mid (I_i)_{i\geq 1}\text{是}X\text{的一个覆盖}\right\}。$$

外测度可以说是对长度概念的直观上最为自然的推广，但是，既然外测度是定义在实数的全体子集上的，则根据定理，它不能满足所有 (1) – (4)。

4.6.6. **练习** 证明 μ^* 没有可数可加性。

为了改进这一点，我们定义：

4.6.7. **定义** 一个集合 $X \subseteq \mathbb{R}$ 是**可测的**，当且仅当对任意集合 $T \subseteq \mathbb{R}$，都有

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap X) + \mu^*(T \cap (\mathbb{R} - X))。$$

而所谓**勒贝格测度**，就是外测度到全体可测集 $\mathcal{M}$ 上的限制，记为 μ。

4.6.8. **练习** 证明测度 $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ 具有可数可加性。

4.6.9. **引理** 假设选择公理成立。如果 $X \subseteq \mathbb{R}$，并且 X 的所有子集都是可测的，则 $\mu(X) = 0$。

证明. 将 $\mathbb{R}$ 看作一个加法群，则 $\mathbb{Q}$ 为其子群。对任意实数 r，集合 $r + \mathbb{Q} = \{r + q \mid q \in \mathbb{Q}\}$ 称为 $\mathbb{Q}$ 在 R 中的一个**陪集**。根据选择公理，令 S 为与 $\mathbb{Q}$ 的每个陪集相交为单点集的集合。则 S 有以下性质：

(1) 如果 $p, q \in \mathbb{Q}$ 并且 $p \neq q$，则 $(S+p) \cap (S+q) = \emptyset$。假设 $x \in (S+p) \cap (S+q)$。则 $x = y + p = z + q$，其中 $y, z \in S$ 并且 $y \neq z$。而 $y - z = q - p$，所以 y, z 在同一个陪集中，矛盾。

(2) 对任意实数 r，存在 $p \in \mathbb{Q}$，$r \in S + p$。令 $x \in S \cap (r + \mathbb{Q})$，令 $p = r - x$。

现在取定 $p \in \mathbb{Q}$，令 $X_p = X \cap (S + p)$。由假设，X_p 是可测的。令 $K \subseteq X_p$ 为紧致的。令 H 为所有平移 $K + q$ 的并，其中 q 取遍 $[0, 1]$ 中的有理数。故 H 有界，所以 $\mu(H) < \infty$。又 $K \subseteq S + p$，(i) 证明 $K + q$ 是两两不交的。因此 $\mu(H) = \sum_q \mu(K + r)$。而 $\mu(K + q) = \mu(K)$，这就蕴涵 $\mu(K) = 0$，又由于这对 X_p 的任一紧致子集都成立，故 $\mu(X_p) = 0$。最后，(ii) 表明 $X = \bigcup X_p$，其中 $p \in \mathbb{Q}$，但 $\mathbb{Q}$ 是可数的，故 $\mu(X) = 0$。 □

4.6.10. **定理** 如果选择公理成立，则存在 $X \subseteq \mathbb{R}$，$X \notin \mathcal{M}$。

证明. 显然 $(0, 1)$ 的测度为 1，故存在不可测子集。 □

4.7 习题

4.7.1. $(W_1, <_1), (W_2, <_2)$ 是良序集，$W_1 \cap W_2 = \emptyset$。令 $< = <_1 \cup <_2 \cup W_1 \times W_2$。证明：

(1) $W_1 \times W_1$，$W_2 \times W_2$ 和 $W_1 \times W_2$ 两两不交；

(2) $<$ 是 $W_1 \cup W_2$ 上的良序关系；

(3) 如果 $W_2 \neq \emptyset$，w_2 是 W_2 的最小元，则 W_1 与 $W_1 \cup W_2[w_2]$ 同构。

4.7.2. W 是良序集，$w_1, w_2 \in W$，则

(1) $W[w_1]$ 与 $W[w_2]$ 同构当且仅当 $w_1 = w_2$；

(2) $W[w_1]$ 是 $W[w_2]$ 的前段当且仅当 $w_1 \leq w_2$。

4.7.3. 如果 $(L, <)$ 是线序集，S 是 L 的前段，是否一定存在 a 使得 $S = \{x \mid x < a\}$?

4.7.4. 集合 X 是传递集当且仅当 $X \subseteq \mathcal{P}(X)$，当且仅当 $\bigcup X \subseteq X$。

4.7.5. 以下命题哪些为真？证明之。

(1) 如果 X, Y 是传递集，则 $X \cup Y$ 是传递集；

(2) 如果 X, Y 是传递集，则 $X \cap Y$ 是传递集；

(3) 如果 X 是传递集，而 $Y \in X$，则 Y 是传递集；

(4) 如果 X 是传递集，而 $Y \subseteq X$，则 Y 是传递集；

(5) 如果 X 是传递集且 $S \subseteq \mathcal{P}(X)$，则 $X \cup S$ 是传递集。

4.7.6. 如果所有 $Y \in X$ 是传递集，则 $\bigcup X$ 是传递集。

4.7.7. 序数 α 是自然数当且仅当 α 的所有非空子集都有最大元。

4.7.8. α, β 是序数，$\beta < \alpha$，证明：如果任给 $\gamma < \alpha$，都有 $\gamma \leq \beta$，则 $\alpha = \beta + 1$。

4.7.9. 证明极限序数的以下性质：

(1) 如果 α 同构于良序集 W，则 α 是极限序数当且仅当 W 没有最大元；

(2) 如果 α 是极限序数，$\beta < \alpha$，则 $\beta + 1 < \alpha$。

4.7.10. 对任意序数 α，证明：

(1)　V_α 是传递集；

(2)　$V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$。

4.7.11. “直观”上验证，除无穷公理外，**ZFC** 的其他公理都在 V_ω 中成立。如果这样，请问 **ZFC** 的所有公理都在 $V_{\omega+\omega}$ 中成立吗？如果不是，哪个公理不成立呢？

4.7.12. 证明对任意序数 β，

$$\{\alpha \in V_\beta \mid \alpha \text{ 是序数}\} = \beta。$$

4.7.13. 利用引理4.2.12证明 **On** 是真类。除此之外，你还有其他方法证明这一点吗？

4.7.14. 证明任何序数都可表示为 $\alpha+n$，其中 α 是 0 或极限序数，而 $n\in\omega$。并且这种表示是唯一的。

4.7.15. 证明：

(1)　$\omega + \omega^2 = \omega^2$；

(2)　如果 $\omega^2 \leq \beta$，则 $\omega + \beta = \beta$。

4.7.16. 假设 $\omega \leq \alpha$，而 $\alpha^2 \leq \beta$，则 $\alpha + \beta = \beta$。

4.7.17. 用超穷归纳法证明序数加法的结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$，乘法对加法的分配律：$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha+\gamma$。

4.7.18. 如果 $\alpha < \beta$，则

(1)　$\alpha+\gamma \leq \beta+\gamma$；

(2)　$\alpha\cdot\gamma \leq \beta\cdot\gamma$，而 $\leq$ 不能替换为 $<$。

4.7.19. 一个序数 α 是极限序数当且仅当存在 β，$\alpha = \omega\cdot\beta$。

4.7.20. 证明 $(\omega \cdot 2)^2 \neq \omega^2 \cdot 2^2$。

4.7.21. 找到函数 $f: \omega \to \omega + \omega$ 和 $g: \omega + \omega \to \omega + \omega + \omega$ 满足:

(1) $\sup(f[\omega]) = \omega + \omega$;

(2) $\sup(g[\omega + \omega]) = \omega + \omega + \omega$;

(3) 但是如果令 $h = g \circ f$，却有 $\sup(h[\omega]) < \omega + \omega + \omega$。

4.7.22. 证明定理4.4.14中展开式的唯一性。

4.7.23. 证明对任意自然数 $n \geq 2$，定义4.5.4中的 f_n 是严格递增的。

4.7.24. 令 $\alpha < \beta < \gamma$ 为极限序数，$f: \alpha \to \beta$ 和 $g: \beta \to \gamma$ 是函数，并且 $\sup(f[\alpha]) = \beta$，$\sup(g[\beta]) = \gamma$。假设 g 是不严格递增函数，即对任意 $\delta, \eta \in \beta$，$\delta \leq \eta$ 蕴涵 $g(\delta) \leq g(\eta)$，同时令 $h = g \circ f$，证明: $\sup(h[\alpha]) = \gamma$。

4.7.25. 证明以下命题是选择公理的等价形式:

$$\forall x \exists \alpha \in \mathbf{On} \exists f (f\text{是函数} \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha \wedge x \subset \mathrm{ran}(f))。$$

第五章　基数

> 无穷！从未有其他问题能如此震撼人类的精神；从未有其他观念能如此激励人类的理智，让它结出丰硕的果实；也从未有其他概念比无穷更需要澄清……
>
> 大卫·希尔伯特

在定理3.6.2中，康托证明了实数是不可数的，所以存在比全体自然数这个无穷更大的无穷。这个定理是无穷基数（或称超穷数理论）的基石。在本章中我们尝试给出（无穷）基数的定义，并讨论它们的性质和运算。事实上，基数算术是集合论一个非常艰深的领域，这里有包括连续统假设在内的众多困难问题。

5.1 定义基数

通过上章的讨论，我们知道在选择公理下，每一集合都可良序化，因而也就存在唯一一个序数与其同构。再回忆等势的定义，显然，同构的集合都是等势的。因此，在选择公理下，每一集合至少有一个序数与其等势。之所以说“至少”，是因为与自然数不同，很多不同的无穷序数是等势的：例如 ω,$\omega+1, \omega+2, \ldots, \omega\cdot\omega$ 都是可数的，因此它们都与 $\mathbb{N}$ 等势。然而，集合 $\{\alpha \mid |\alpha| = |\mathbb{N}|\}$ 是序数的集合，因此有最小元 $\alpha_{\mathbf{N}}$，$\alpha_{\mathbf{N}}$ 是与 $\mathbb{N}$ 等势的最小的序数，此处 $\alpha_{\mathbf{N}} = \omega$，而这是唯一的。所以我们有以下命题：

5.1.1. 命题 如果以 α_X 表示与集合 X 等势的最小的序数，则对任意集合 X, Y，

$$|X| = |Y| \text{ 当且仅当 } \alpha_X = \alpha_Y。 \tag{5.1}$$

而据此我们就可定义：

5.1.2. 定义 集合 A 的**基数**$|A|$ 定义为与其等势的最小的序数。

$$|A| = \min\{\alpha \mid |\alpha| = |A|\}。\text{[1]} \tag{5.2}$$

照这个定义，一个序数是（某个集合的）基数当且仅当不存在比它小的序数与其等势，这样的序数常称为**前段序数**。以下命题总结了一个序数成为基数的等价条件。

5.1.3. 命题 对任意序数 α，以下条件等价：

(1) α 是基数；

(2) $|\alpha| = \alpha$；

(3) 对任意序数 β，如果 $\beta < \alpha$，则 $\beta < |\alpha|$；

(4) 对任意序数 β，如果 $\beta < \alpha$，则 $|\beta| < |\alpha|$；

(5) 对任意序数 β，如果 $\beta < \alpha$，则 $|\beta| \neq |\alpha|$。

证明. (1) $\Rightarrow$ (2)。 假设 α 是基数，则存在集合 A，$|A| = \alpha$，这就意味着 $|A| = |\alpha|$，所以 $|A| = |\alpha| = \alpha$;

(2) $\Rightarrow$ (3)。 显然;

(3) $\Rightarrow$ (4)。 显然，对任意序数 β，$|\beta| \leq \beta$;

(4) $\Rightarrow$ (5)。 显然;

(5) $\Rightarrow$ (1)。 由 (5) 可知，所有比 α 小的序数都不与 α 等势，即 α 是与集合 α 等势的最小序数，因此 α 是基数。

□

[1] 注意此处等式右边的 $|A|$ 与等式左边的 $|A|$ 意思不同，“$|\alpha| = |A|$”表示“α 与 A 等势”，等式左边的“$|A|$”则表示 A 的基数。

5.1.4. 练习 证明：如果 X 是无穷序数的集合，则 $|X| \leq \sup X$。

今后，我们一般用希腊字母 $\kappa, \lambda, \ldots$ 表示基数。

5.1.5. 定理

(1) ω 是基数，并且对任意 $n \in \omega$，n 是基数；

(2) 如果 κ 是无穷基数，即 κ 是基数且 $\kappa \geq \omega$，则 κ 是极限序数。

证明. (1) 由于 ω 不与任何自然数等势，故根据命题 5.1.3 (5)，ω 是基数；同样，由鸽笼原理，任何自然数 n 都不与比它小的自然数等势，故每个自然数也是基数；

(2) 显然，如果 β 是无穷序数，则 β 与 $\beta+1$ 等势。

□

我们已经知道至少存在两个不同的无穷基数，自然数的基数和实数的基数。一个自然的问题是"无穷有没有限制?"，是否存在最大的基数？以下定理给出了否定的回答。它其实是第一章的一个习题（习题1.4.8），常常被称为"康托定理"。

5.1.6. 定理 对任意集合 X，$|X| < |\mathcal{P}(X)|$。

证明. 显然，$|X| \leq |\mathcal{P}(X)|$，因为函数 $f(x) = \{x\}$ 是 X 到 $\mathcal{P}(X)$ 的单射。以下用反证法证明 $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$。反设存在双射 $f: X \to \mathcal{P}(X)$，令 $Y = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$，则 $Y \in \mathcal{P}(X)$，因此存在 $z \in X$，$f(z) = Y$。但是，$z \in Y$ 当且仅当 $z \in \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ 当且仅当 $z \notin f(z)$ 当且仅当 $z \notin Y$，矛盾。 □

下面的定理可以允许我们像定义后继和极限序数那样定义后继和极限基数。

5.1.7. 定理

(1) 对任何基数 λ，都存在一个大于它的最小的基数；

(2) 如果 K 是基数的集合，则 $\alpha = \bigcup K$ 是基数。

证明. (1) 由康托定理，令 κ 是 $\mathcal{P}(\lambda)$ 的基数，μ 是 $\mathcal{P}(\kappa)$ 的基数，则集合

$$\{\zeta \in \mu \mid \lambda < \zeta \text{且} \zeta \text{是基数}\} \tag{5.3}$$

是非空的序数集合，因此有最小元。

(2) 如果 $\beta < \alpha$，即 $\beta \in \alpha$，则存在 $\kappa \in X$，$\beta < \kappa \leq \alpha$，所以 $\beta < \kappa = |\kappa| \leq |\alpha|$，根据命题 5.1.3 (3)，$\alpha$ 是基数。

□

根据定理5.1.7，我们可以定义：

5.1.8. **定义** 对任何基数 κ，κ^+ 是大于 κ 的最小基数 λ。如果 $\lambda = \kappa^+$，则 λ 称为**后继基数**。如果 $\lambda \geq \omega$ 并且不是后继基数，则称为**极限基数**。

5.1.9. **练习** 假设 α 是序数，则

(1) $|\alpha| \leq \alpha < |\alpha|^+$；

(2) 如果 κ 是基数，则 $\alpha < \kappa^+$ 当且仅当 $|\alpha| < \kappa^+$。

无穷基数常用希伯来字母 $\aleph$ 来表示，例如第一个无穷基数记为“$\aleph_0$”，随后是“$\aleph_1$”，“$\aleph_2$”等等。但同样常用的是“ω_0”，“ω_1”，“ω_2”，……。这两者的区别在于，当我们强调它是“基数”时，使用 $\aleph_0$。当我们强调它是序数时，使用 ω_0。但这种区分似乎不是严格的。

5.1.10. **定义** 对任意序数 α，我们递归定义 ω_α 和 $\aleph_\alpha$ 如下：

(1) $\omega_0 = \aleph_0 = \omega$；

(2) $\omega_{\alpha+1} = \aleph_{\alpha+1} = \aleph_\alpha^+$（注意，此处为基数的后继）；

(3) 对极限序数 γ，$\omega_\gamma = \aleph_\gamma = \sup\{\aleph_\alpha \mid \alpha < \gamma\}$。

以下引理表明，$\aleph_\alpha$ 恰好是“第 α 个无穷基数”。

5.1.11. 引理

(1)　对任意 α，$\aleph_\alpha$ 是无穷基数；

(2)　对任意无穷基数 κ，存在 α，使得 $\kappa = \aleph_\alpha$。

证明.　(1)　对 α 用超穷归纳可得。

(2)　显然，对任意 β，$\beta \leq \aleph_\beta$。因此，对任意基数 κ，存在 β，例如 $\beta = \kappa + 1$，使得 $\kappa < \aleph_\beta$。这样，我们就只需证明

对任意 $\kappa < \aleph_\beta$，存在 α，使得 $\kappa = \aleph_\alpha$。

而这可以对 β 应用超穷归纳得到：$\beta = 0$ 时显然；若 $\beta = \gamma + 1$ 为后继序数，则此时 $\kappa \leq \aleph_\gamma$。如果 $\kappa = \aleph_\gamma$，则命题已得证；如果 $\kappa < \aleph_\gamma$，则根据归纳假设，有 α，$\kappa = \aleph_\alpha$；若 β 为极限序数，则有 $\gamma < \beta$，$\kappa < \aleph_\gamma$，根据归纳假设，亦有 α，$\kappa = \aleph_\alpha$。 □

5.2 基数算术

本节定义基数的算术运算，即加法，乘法和幂运算，同时研究它们的性质。由于自然数就是有穷基数，因此，在有穷情况下，基数运算等同于自然数的运算，但对于无穷基数，情况则很不相同。

5.2.1. 定义 $\kappa \oplus \lambda = |A \cup B|$，其中 $\kappa = |A|$ 而 $\lambda = |B|$，并且 $A \cap B = \emptyset$。

以下引理证明我们对加法的定义不依赖于 A, B 的选择。因而这个定义是合理的。

5.2.2. 引理 如果 $|A| = |A'|$ 且 $|B| = |B'|$，而且 $A \cap B = A' \cap B' = \emptyset$，则 $|A \cup B| = |A' \cup B'|$。

容易验证，以上定义的的加法满足：

- 交换律：$\kappa \oplus \lambda = \lambda \oplus \kappa$；
- 结合律：$\kappa \oplus (\lambda \oplus \mu) = (\kappa \oplus \lambda) \oplus \mu$；
- $\kappa \leq \kappa \oplus \lambda$；

- 如果 $\kappa_1 \leq \kappa_2$ 并且 $\lambda_1 \leq \lambda_2$，则 $\kappa_1 \oplus \lambda_1 \leq \kappa_2 \oplus \lambda_2$。

注意到，根据定理3.3.7，无穷基数的加法有不同寻常的性质：$\aleph_0 \oplus \aleph_0 = \aleph_0$！

5.2.3. 定义 $\kappa \otimes \lambda = |A \times B|$，其中 $|A| = \kappa$ 而 $|B| = \lambda$。

5.2.4. 引理 如果 A, B, A', B' 满足 $|A| = |A'|$ 且 $|B| = |B'|$，则 $|A \times B| = |A' \times B'|$。

同样，以上定义的乘法满足：

- 交换律：$\kappa \otimes \lambda = \lambda \otimes \kappa$;
- 结合律：$\kappa \otimes (\lambda \otimes \mu) = (\kappa \otimes \lambda) \otimes \mu$;
- 分配律：$\kappa \otimes (\lambda \oplus \mu) = \kappa \otimes \lambda \oplus \kappa \otimes \mu$;
- $\kappa \leq \kappa \otimes \lambda$，如果 $\lambda > 0$;
- 如果 $\kappa_1 \leq \kappa_2$ 并且 $\lambda_1 \leq \lambda_2$，则 $\kappa_1 \otimes \lambda_1 \leq \kappa_2 \otimes \lambda_2$。

- $\kappa \oplus \kappa = 2 \otimes \kappa$：如果 $|A| = \kappa$，则 $2 \otimes \kappa$ 是集合 $\{0,1\} \times A = \{0\} \times A \cup \{1\} \times A$ 的基数，而 $|\{0\} \times A| = |\{1\} \times A| = \kappa$，而它们又是不相交的，所以 $\kappa \oplus \kappa = 2 \otimes \kappa$。所以：

- 如果 $\kappa \geq 2$ ，$\kappa \oplus \kappa \leq \kappa \otimes \kappa$。

由定理3.3.9 ，与加法类似，$\aleph_0 \otimes \aleph_0 = \aleph_0$。对此，我们有更一般的结果：

5.2.5. 定理 对任意无穷基数 κ，$\kappa \otimes \kappa = \kappa$。

证明. 由于 $\kappa = \aleph_0$ 时命题显然成立（可数集合的卡氏积依然可数，见引理3.3.9），我们不妨设 $\kappa \geq \aleph_1$。对 κ 作归纳。假设对任意无穷的 $\lambda < \kappa$ 命题已成立，我们定义 $\kappa \times \kappa$ 上的一个序 $\triangleleft$ 为

$$(\alpha_1, \beta_1) \triangleleft (\alpha_2, \beta_2) \quad \text{当且仅当} \quad \begin{aligned} &\max(\alpha_1, \beta_1) < \max(\alpha_2, \beta_2), \text{或} \\ &\max(\alpha_1, \beta_1) = \max(\alpha_2, \beta_2), \alpha_1 < \alpha_2, \text{或} \\ &\max(\alpha_1, \beta_1) = \max(\alpha_2, \beta_2), \\ &\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 < \beta_2\text{。} \end{aligned} \tag{5.4}$$

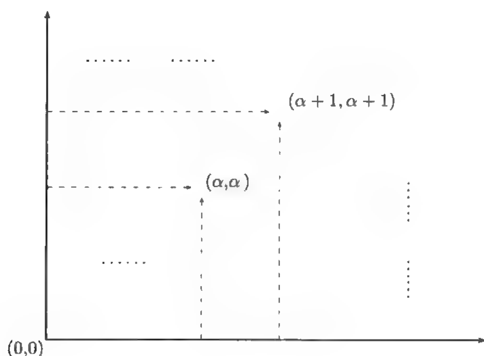


图 5.1: 良序集 $(\kappa\times\kappa,\lhd)$

$\lhd$ 实际上是首先按照 $\max(\alpha,\beta)$，然后按照字典顺序排序。这个序有时也称为 $\kappa\times\kappa$ 上的“标准序”（见图5.1)。我们接下来证明 $\lhd$ 是 $\kappa\times\kappa$ 上的良序。这实际上很容易，例如证明 $\lhd$ 是连接的，任取 $(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2)$，首先比较 $\max(\alpha_1,\beta_1)$ 和 $\max(\alpha_2,\beta_2)$，因为这是序数上的序，所以总可以进行。如果它们其中一个大于（或小于）另一个，则我们就达到了目的。如果它们相等，则继续比较 α_1 和 α_2，由于后者也是序数上的序，故也总是可以进行，直到最终比较 β_1 和 β_2。再比如，要证 $\lhd$ 的良基性，任取 $\kappa\times\kappa$ 的非空子集 X，首先取 X 中 $\max(\alpha,\beta)$ 最小的那些元素，这是序数上的序，所以总是存在，这些元素构成了 X 的非空子集。更具体地说就是令 $\delta=\min\{\max(\alpha,\beta)\mid(\alpha,\beta)\in X\}$，然后取

$$Y=\{(\alpha,\beta)\in X\mid\max(\alpha,\beta)=\delta\}。\tag{5.5}$$

Y 是 X 的非空子集，它的元素都比 $X-Y$ 的元素小。类似地，取 $\gamma=\min\{\alpha\mid(\alpha,\beta)\in Y\}$，而令 $Z=\{(\alpha,\beta)\in Y\mid\alpha=\gamma\}$，则 Z 是 Y 的非空子集，因而也是 X 的非空子集，而且其元素比 X 中的其他元素小。最后，令 $\eta=\min\{\beta\mid(\alpha,\beta)\in Z\}$，则 $\{(\alpha,\beta)\in Z\mid\beta=\eta\}$ 只有一个元素，它是 Z 的最小元，因而也是 X 的最小元。最后，我们证明 $(\kappa\times\kappa,\lhd)$ 的**序型**，即，与其同构的唯一序数是 κ。由于 κ 可以一一地映射入 $\kappa\times\kappa$，这个集合的序型显然不小于 κ。所以我们只需证明它也不大于 κ。为此我们也只需证明对任意 $(\alpha,\beta)\in\kappa\times\kappa$，若由 (α,β) 确定的前段是

$$W_{\alpha,\beta}=\{(\xi,\zeta)\mid(\xi,\zeta)\lhd(\alpha,\beta)\},\tag{5.6}$$

良序集 $(W_{\alpha,\beta},\lhd)$ 的序型严格小于 κ。如果 α,β 都是有穷的，则 (α,β) 确定的前段也是有穷的，命题显然成立。所以不妨设至少其中一个不小于 ω。这样，令 $\delta = |\max(\alpha,\beta)+1|$，则 δ 是基数并且

$$\aleph_0 \leq \delta < \kappa。$$

由归纳假设，$\delta\otimes\delta = \delta < \kappa$，所以良序集 $(\delta\times\delta,\lhd)$ 的基数就是 δ。这样，如果与良序集 $(W_{\alpha,\beta},\lhd)$ 同构的唯一序数是 γ，则 $|\gamma| \leq |(\delta\times\delta,\lhd)| = \delta$，所以

$$\gamma < \delta^+ \leq \kappa。$$

□

5.2.6. **推论** 对任意无穷基数 κ,λ，$\kappa\oplus\lambda = \kappa\otimes\lambda = \max(\kappa,\lambda)$。

证明. 不妨设 $\lambda \leq \kappa$，由定理，$\kappa\otimes\lambda \leq \kappa\otimes\kappa = \kappa$，所以 $\kappa \leq \kappa\oplus\lambda \leq \kappa\otimes\lambda \leq \kappa$。 □

以下我们定义基数的幂运算，而这将引出集合论的一些根本问题。

5.2.7. **定义** $\kappa^\lambda = \left|A^B\right|$，其中 $|A| = \kappa$ 且 $|B| = \lambda$。

注意到我们使用了与序数运算相同的记法，但一般并不会混淆，读者在阅读时稍加注意即可区分。而且，κ^λ 还表示集合 λ 到集合 κ 全体映射的集合，这个集合的基数就是 κ^λ。

5.2.8. **引理** 如果 $|A| = |A'|$ 且 $|B| = |B'|$，则 $\left|A^B\right| = \left|A'^{B'}\right|$。

幂运算满足以下一些性质：

- 如果 $\lambda > 0$，则 $\kappa \leq \kappa^\lambda$；
- 如果 $\kappa > 1$，则 $\lambda \leq \kappa^\lambda$；
- 如果 $\kappa_1 \leq \kappa_2$ 并且 $\lambda_1 \leq \lambda_2$，则 $\kappa_1^{\lambda_1} \leq \kappa_2^{\lambda_2}$；
- $\kappa\otimes\kappa = \kappa^2$：如果 $|A| = \kappa$，则任何 $(a_0,a_1)\in A\times A$ 都是一个 $\{0,1\}$ 到 A 中的函数，反之亦然，所以 $|A\times A| = \left|A^{\{0,1\}}\right| = \kappa^2$。

5.2.9. 定理 假设 κ,λ 是无穷基数，则

(1) $\kappa^{\lambda\oplus\mu}=\kappa^{\lambda}\otimes\kappa^{\mu}$；

(2) $(\kappa^{\lambda})^{\mu}=\kappa^{\lambda\otimes\mu}$；

(3) $(\kappa\otimes\lambda)^{\mu}=\kappa^{\mu}\otimes\lambda^{\mu}$；

(4) $2^{\kappa}>\kappa$。

证明. 见习题5.6.4。 □

5.2.10. 命题 如果 $\kappa\leq\lambda$ 是无穷基数，则 $\kappa^{\lambda}=2^{\lambda}$。

证明. $2^{\lambda}\leq\kappa^{\lambda}\leq(2^{\lambda})^{\lambda}=2^{\lambda}$。 □

还记得（定义3.2.2），我们用 $A^{<\mathbb{N}}$ 表示 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A^{n}$。现在我们把它推广到一般的序数上。

5.2.11. 定义 假设 X 为集合，α 为序数，我们令 $X^{<\alpha}=\bigcup\{X^{\beta}\mid\beta<\alpha\}$，如果 λ 是基数，则定义 $\kappa^{<\lambda}=|X^{<\lambda}|$，其中 $|X|=\kappa$。我们以 $[\kappa]^{\lambda}$ 表示集合 $\{X\subseteq\kappa\mid|X|=\lambda\}$ 的基数，注意，当 $\kappa<\lambda$ 时，$[\kappa]^{\lambda}=0$；类似地，我们以 $[\kappa]^{<\lambda}$ 表示集合 $\{X\subseteq\kappa\mid|X|<\lambda\}$ 的基数。

5.2.12. 命题 对任意无穷基数 κ,λ，

(1) $\kappa^{<\lambda}=\sup\{\kappa^{\eta}\mid\eta\text{ 是基数并且 }\eta<\lambda\}$；

(2) 如果 $\lambda\leq\kappa$，则 $[\kappa]^{\lambda}=\kappa^{\lambda}$；

(3) 如果 $\lambda\leq\kappa$，则 $[\kappa]^{<\lambda}=\kappa^{<\lambda}$。

证明. (1) 假设 $\gamma=\sup\{\kappa^{\eta}\mid\eta\text{是基数并且 }\eta<\lambda\}$，我们证明 $\kappa^{<\lambda}=\gamma$。一个方向是平凡的，因为集合 $\{\kappa^{\eta}\mid\eta\text{是基数并且 }\eta<\lambda\}\subseteq\{\kappa^{\beta}\mid\beta<\lambda\}$，所以

$$\gamma=\sup\{\kappa^{\eta}\mid\eta\text{是基数并且 }\eta<\lambda\}\leq\sup\{\kappa^{\beta}\mid\beta<\lambda\}=\kappa^{<\lambda}。\tag{5.7}$$

另一方面，对任意 $\alpha<\lambda$，如果 $|\alpha|=\eta$，则 $|\kappa^{\alpha}|=\kappa^{\eta}\leq\gamma$，所以 $\kappa^{<\lambda}$ 是不多于 γ 个基数不大于 γ 的集合的并，所以 $\kappa^{<\lambda}\leq\gamma$。

(2) 对任意 $X \in [\kappa]^\lambda = \{X \subseteq \kappa \mid |X| = \lambda\}$，令

$$[f]_X = \left\{f \mid f : \lambda \to \kappa \text{ 并且 } \mathrm{ran}(f) = X\right\},$$

则所有这些 $[f]_X$ 构成一个非空集合的族 $\mathcal{F}$。如果令 $h(X) = [f]_X$ 为 $[\kappa]^\lambda$ 到 $\mathcal{F}$ 的双射而 g 为 $\mathcal{F}$ 上的选择函数，则 $g \circ h$ 为 $[\kappa]^\lambda$ 到 κ^λ 中的单射，所以 $[\kappa]^\lambda \leq \kappa^\lambda$。另一个方向，注意到对任意 $f \in \kappa^\lambda$，f 都是 $\lambda \otimes \kappa$ 的子集并且 $|f| = \lambda$，所以 $\kappa^\lambda \leq [\lambda \otimes \kappa]^\lambda$，而由于 $\lambda \otimes \kappa = \kappa$，所以后者等于 $[\kappa]^\lambda$。

(3) 由 (2)，

$$[\kappa]^{<\lambda} = \bigcup\left\{[\kappa]^\eta \mid \eta < \lambda \text{ 且 } \eta \text{ 是基数}\right\} = \bigcup\left\{\kappa^\eta \mid \eta < \lambda \text{ 且 } \eta \text{ 是基数}\right\},$$

而根据 (1)，这正是 $\kappa^{<\lambda}$。 □

关于基数的幂运算我们已经知道一些事实，例如，对任意 $\aleph_\alpha$，$2^{\aleph_\alpha} \geq \aleph_{\alpha+1}$，特别地，$2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$。既然所有的无穷基数都是某个 $\aleph_\alpha$，那 $2^{\aleph_0} = \aleph_?$ 呢？由于我们还知道 $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$，这个问题就有了更能引起兴趣的形式：实数到底有多少个呢？康托的连续统假设 **CH** (Continuum Hypothesis) 给出了如下回答：实数恰好是比自然数大的第一个无穷，即：

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1。\tag{5.8}$$

而自然地，所谓的广义连续统假设 **GCH** (General Continuum Hypothesis) 就是：

$$2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}。\tag{5.9}$$

今后我们常会将 $2^{\aleph_0}$ 称为**连续统的基数**，将函数 $2^{\aleph_\alpha}$ 称为**连续统函数**。康托花费了很多年试图去证明这一假设。事实上，他已经证明至少对于实数的闭子集，连续统假设是成立的：每个不可数的闭集都具有连续统的基数。这也是他在连续统问题上取得的最好结果，虽然他始终坚信会找到关于这个问题的证明。

5.3 共尾

共尾概念在基数算术的研究中有着极为重要的作用。我们可以把它看作对如下现象的刻画：比起 $\aleph_0$，$\aleph_\omega$ 是一个很大的基数，但却存在从 $\aleph_0$ 到 $\aleph_\omega$ 的映射 $f(n) = \aleph_n$，f 的值域在 $\aleph_\omega$ 中是“无界的”，就是说我们能在 ω 步内从下面达到 $\aleph_\omega$。而另一方面，$\aleph_1$，比起 $\aleph_\omega$ 要小很多，但却不存在满足以上条件的由 $\aleph_0$ 到 $\aleph_1$ 的映射，从这个角度，$\aleph_1$ 比 $\aleph_\omega$ “大”。

5.3.1. 定义

(1) 设 A 是序数 α 的子集，如果 A 满足

$$\forall\gamma < \alpha\exists\xi \in A(\gamma \leq \xi), \tag{5.10}$$

则称 A 在 α 中是**无界的**。

(2) 对任意序数 α，$\mathrm{cf}(\alpha)$ 是满足以下性质的最小序数 β：

$$存在映射 f : \beta \to \alpha, 使得 f[\beta] 在 \alpha 中是无界的。$$

这样的映射 f 称为**共尾映射**，$\mathrm{cf}(\alpha)$ 称为 α 的**共尾**。

(3) 对任何序数 α，如果 $\mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$，就称 α 是**正则的**，不是正则的序数称为**奇异的**。

5.3.2. 命题 以下是有关共尾的一些基本事实：

(1) $A \subset \alpha$ 是无界的当且仅当 $\alpha = \bigcup\{\xi + 1 \mid \xi \in A\}$。因此，对任意序数，如果 $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ 是共尾映射，则 $\bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\alpha)}[f(\xi) + 1] = \alpha$。

(2) 对任意 α，$\mathrm{cf}(\alpha) \leq \alpha$；

(3) 任意后继序数 $\alpha = \beta + 1$ 的共尾是 1；

(4) 对任意极限序数 $\alpha > 0$，$\mathrm{cf}(\alpha) \geq \omega$。

证明. 证明留给读者作为练习。 □

以上命题表明，只有极限序数的共尾是令人感兴趣的。

5.3.3. 定理 对任何极限序数 α 都存在一个严格递增的共尾映射 $f : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$。

证明. α 是后继序数的情况是平凡的。如果 α 是极限序数，并且 $g : \mathrm{cf}(\alpha) \to \alpha$ 是共尾映射。对任意 $\eta < \mathrm{cf}(\alpha)$，递归定义

$$f(\eta) = \max\left\{g(\eta), \bigcup_{\xi<\eta}(f(\xi) + 1)\right\}。 \tag{5.11}$$

显然，对任意 $\xi<\eta<\mathrm{cf}(\alpha)$，$f(\xi)<f(\xi)+1\leq f(\eta)$。所以 f 是严格递增函数。以下证明 f 是共尾映射。首先我们归纳证明

$$\text{对任意 } \eta<\mathrm{cf}(\alpha), f(\eta)\in\alpha。\tag{5.12}$$

即 f 是 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 到 α 映射。假设对任意 $\xi<\eta<\mathrm{cf}(\alpha)$，$f(\xi)\in\alpha$，则

$$f(\eta)=\max\left\{g(\eta),\bigcup_{\xi<\eta}(f(\xi)+1)\right\}\leq\alpha。\tag{5.13}$$

但是 $f(\eta)$ 不能等于 α，否则 $f\restriction\eta$ 就是到 α 的共尾映射，即 $\eta\geq\mathrm{cf}(\alpha)$，矛盾。其次，对任意 $\xi\in\alpha$，存在 $\eta<\mathrm{cf}(\alpha)$，$\xi\leq g(\eta)\leq f(\eta)$。 □

5.3.4. **推论** 对任意极限 α，$\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))=\mathrm{cf}(\alpha)$。

证明. 令 $f:\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))\to\mathrm{cf}(\alpha)$ 和 $g:\mathrm{cf}(\alpha)\to\alpha$ 为严格递增的共尾映射。考虑 $g\circ f:\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))\to\alpha$。对任意 $\xi\in\alpha$，存在 $\eta<\mathrm{cf}(\alpha)$，$\xi\leq g(\eta)$；而对于 η，存在 $\zeta\in\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))$，$\eta\leq f(\zeta)$，因此

$$\xi\leq g(\eta)\leq g(f(\zeta))=(g\circ f)(\zeta)。\tag{5.14}$$

所以 $g\circ f$ 是共尾映射，所以 $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))\geq\mathrm{cf}(\alpha)$，所以 $\mathrm{cf}(\mathrm{cf}(\alpha))=\mathrm{cf}(\alpha)$。 □

也即是说任意序数的共尾都是正则的。又，所有正则的序数都是基数，所以任意一个序数的共尾都是基数。

5.3.5. **命题** 假设 γ 是极限序数，$\langle\alpha_\xi\mid\xi<\gamma\rangle$ 是序数的严格递增序列，而 α 是它的极限，则 $\mathrm{cf}(\alpha)=\mathrm{cf}(\gamma)$。

证明. 证明留给读者作为练习。 □

5.3.6. **定理** 对任意无穷基数 κ，κ^+ 是正则的。

证明. 令 $\alpha<\kappa^+$，$f:\alpha\to\kappa^+$ 为函数。显然 $|\alpha|\leq\kappa$，并且对任意 $\xi<\alpha$，$|f(\xi)|\leq\kappa$。这样，$\left|\bigcup_{\xi<\alpha}[f(\xi)+1]\right|\leq\kappa$，所以 $\bigcup_{\xi<\alpha}[f(\xi)+1]\neq\kappa^+$。这就证明了对任意 $\alpha<\kappa^+$，$\mathrm{cf}(\kappa^+)\neq\alpha$。因此 $\mathrm{cf}(\kappa^+)=\kappa^+$。 □

这个定理表明，任何奇异的基数都是极限基数。考虑任意无穷基数 $\aleph_\alpha$，存在由 $\aleph_\alpha$ 开始的序列：

$$\aleph_\alpha, \aleph_{\alpha+1}, \aleph_{\alpha+2}, \cdots, \aleph_{\alpha+n}, \cdots。$$

显然 $f(n) = \aleph_{\alpha+n}$ 是 ω 到 $\aleph_{\alpha+\omega}$ 的共尾映射，即 $\mathrm{cf}(\aleph_{\alpha+\omega}) = \omega$，因此，$\aleph_{\alpha+\omega}$ 是奇异基数。这就表明，对任意无穷基数，总存在比它大的奇异基数。

后继基数都是正则的，ω 也是正则的，那是否存在大于 ω 的正则极限基数呢？假设存在这样的极限基数 $\aleph_\alpha$，由于 α 是极限序数，故 $\aleph_\alpha = \bigcup\{\aleph_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$。因此 $f : \alpha \to \aleph_\alpha$ 是共尾映射，所以 $\aleph_\alpha = \mathrm{cf}(\aleph_\alpha) \leq \alpha$，这蕴涵着 $\aleph_\alpha = \alpha$。这就说明，一个极限基数是正则基数的必要条件是：

$$\alpha = \aleph_\alpha。 \tag{5.15}$$

但这并不是充分条件。任取 $\aleph_\gamma$，构造基数的序列：

$$\alpha_0 = \aleph_\gamma;$$
$$\alpha_{n+1} = \aleph_{\alpha_n},$$

令 $\alpha = \bigcup\{\alpha_n \mid n < \omega\}$，则 $\aleph_\alpha = \alpha$，然而，由于 $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$，因此 α 是奇异基数，这同时也证明了存在任意大的奇异基数。事实上，正则的极限基数被称为**弱不可达基数**，我们在 **ZFC** 中不能证明存在这样的基数。一个正则基数 κ 如果还是**强极限的**，即对任意 $\lambda < \kappa$，都有 $2^\lambda < \kappa$（定义见5.5.2），则称 κ 是**强不可达基数**，或**不可达基数**。在 **ZFC** 中自然也不能证明不可达基数的存在。

正如我们已经提到的，共尾在基数算术中有很重要的应用，这一点在以下定理以及随后的章节中都会有所体现。

5.3.7. 寇尼希引理 对任何无穷基数 κ，

$$\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa。 \tag{5.16}$$

证明. 令 $f : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ 为共尾映射，令 $G : \kappa \to \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ 为任意函数，我们证明 G 不可能是满射。为此定义 $h \in \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ 为：对任意 $\alpha \in \mathrm{cf}(\kappa)$，

$$h(\alpha) = \min(\kappa - \{G(\xi)(\alpha) \mid \xi < f(\alpha)\})。 \tag{5.17}$$

由于 $|\{G(\xi)(\alpha) \mid \xi < f(\alpha)\}| \leq |f(\alpha)| < \kappa$，所以以上定义是合理的。对任意 $\xi < \kappa$，总存在 $\alpha < \mathrm{cf}(\kappa)$ 使得 $\xi < f(\alpha)$，所以 $h(\alpha) \neq G(\xi)(\alpha)$。因此，对任意 $\xi < \kappa$，$h \neq G(\xi)$，即 $h \notin G[\kappa]$。 □

5.3.8. 推论 对任意序数 α，$\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$。

证明. 反设 $\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha}) \leq \aleph_\alpha$，则 $(2^{\aleph_\alpha})^{\mathrm{cf}(2^{\aleph_\alpha})} \leq (2^{\aleph_\alpha})^{\aleph_\alpha} = 2^{\aleph_\alpha}$，与定理矛盾。 □

5.3.9. 注

(1) 由此我们可以立即得到 $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$，而这意味着 $2^{\aleph_0}$ 不能是 $\aleph_\omega$，也不能是 $\aleph_{\omega+\omega}$ 等等。这一结果的意义在于，它是目前已知的 **ZFC** 对连续统基数的唯一限制。

(2) 对于连续统函数 $2^{\aleph_\alpha}$，除了以上推论，已知 **ZFC** 对它仅有的限制是单调性，即 $\alpha < \beta$ 蕴涵 $2^{\aleph_\alpha} \leq 2^{\aleph_\beta}$。

5.3.10. 推论 对任意序数 α,β，$\mathrm{cf}(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}) > \aleph_\beta$。

证明. 与推论5.3.8类似。 □

5.4 无穷和与积

5.4.1. 定义 假设 $\{\kappa_i \mid i \in I\}$ 为一集基数，而 $\{X_i \mid i \in I\}$ 为两两不交的集合族，并且对任意 $i \in I$，$|X_i| = \kappa_i$，则

$$\bigoplus_{i\in I} \kappa_i = \left|\bigcup_{i\in I} X_i\right|; \quad \bigotimes_{i\in I} \kappa_i = \left|\prod_{i\in I} X_i\right|。 \tag{5.18}$$

首先注意到，由选择公理可以证明，以上定义不依赖于 X_i 的选择。同时，$\bigotimes$ 的定义并不要求 X_i 是两两不交的。以下我们证明一些简单事实。

5.4.2. 命题 若 λ 为无穷基数而 $\{\kappa_\xi\}_{\xi<\lambda}$ 是非零基数的序列，则 $\bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa_\xi = \lambda \otimes \sup_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$。

证明. 令 $\kappa = \sup_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$，对任意 $\xi < \lambda$，显然有 $\kappa \geq \kappa_\xi$，所以

$$\bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa_\xi \leq \bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa = \lambda \otimes \kappa。$$

另一方面，λ 和 κ 都不大于 $\bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$，因此

$$\lambda \otimes \kappa = \max(\lambda,\kappa) \leq \bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa_\xi。$$ □

5.4.3. **注**　由命题5.4.2，我们立即有以下一些平凡的推论：

- $\bigoplus_{\xi<\lambda}\kappa_\xi = \max(\lambda, \sup_{\xi<\lambda}\kappa_\xi)$，事实上这一等式只要求每个 κ_ξ 不为 0 且 λ 或其中一个 κ_ξ 为无穷基数即可；

- 特别地，如果 $\langle\kappa_\xi \mid \xi < \mathrm{cf}(\kappa)\rangle$ 是一个序列，并且 $2 \le \kappa_\xi < \kappa$，则 $\bigoplus_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\xi = \max(\mathrm{cf}(\kappa), \sup_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\xi) = \kappa$。所以，对任意无穷基数 κ，我们总能找到一个长度为 $\mathrm{cf}(\kappa)$ 的基数的序列，它的和为 κ。

- 更为显然的是：$\sup_{\xi<\lambda}\kappa_\xi \le \bigoplus_{\xi<\lambda}\kappa_\xi$，这对任意基数都成立；

- 当然，如果 $\lambda \le \sup_{\xi<\lambda}\kappa_\xi$，则 $\bigoplus_{\xi<\lambda}\kappa_\xi = \sup_{\xi<\lambda}\kappa_\xi$。

其他一些类似于有穷算术规律的规则罗列于下面的命题中。

5.4.4. **命题**　*假设 $\langle\kappa_i\rangle_{i\in I}$ 为基数的序列，而 λ 为基数，则*

(1)　*如果 $\{X_j \mid j \in J\}$ 是 I 的划分，则*

(a)　*（交换律和结合律）*

$$\bigoplus_{i\in I}\kappa_i = \bigoplus_{j\in J}\bigoplus_{i\in X_j}\kappa_i \quad \bigotimes_{i\in I}\kappa_i = \bigotimes_{j\in J}\bigotimes_{i\in X_j}\kappa_i, \tag{5.19}$$

(b)　*（分配律）*

$$\bigotimes_{j\in J}\bigoplus_{i\in X_j}\kappa_i = \bigoplus(\bigotimes_{j\in J}\kappa_{f(j)} \mid f \in \prod_{j\in J}X_j); \tag{5.20}$$

(2)　$\lambda\cdot\bigoplus_{i\in I}\kappa_i = \bigoplus_{i\in I}\lambda\cdot\kappa_i$；

(3)　$\lambda^{\bigoplus_{i\in I}\kappa_i} = \bigotimes_{i\in I}\lambda^{\kappa_i}$；

(4)　$(\bigotimes_{i\in I}\kappa_i)^\lambda = \bigotimes_{i\in I}\kappa_i^\lambda$.

证明. 这些命题的证明并不复杂，只是涉及交、并和卡氏积的一些基本性质，我们把证明留给读者。见习题5.6.15。 □

5.4.5. 命题 假设 λ 为无穷基数而 $\{\kappa_\xi\}_{\xi<\lambda}$ 是非零基数的序列，并且还是非降的，则 $\bigotimes_{\xi<\lambda}\kappa_\xi = (\sup_{\xi<\lambda}\kappa_\xi)^\lambda$。

证明. 令 $\kappa = \sup_{\xi<\lambda}\kappa_\xi$。因为 $\lambda\times\lambda=\lambda$，所以可以令 $\lambda = \bigcup\{X_\xi \mid \xi<\lambda\}$，其中任一 $X_\xi\subseteq\lambda$ 并且 $|X_\xi|=\lambda$。注意到对任意 $\xi<\lambda$，$\kappa = \sup_{\zeta\in X_\xi}\kappa_\zeta$，这样，

$$\kappa^\lambda = \bigotimes_{\xi<\lambda}\kappa \le \bigotimes_{\xi<\lambda}\bigotimes_{\zeta\in X_\xi}\kappa_\zeta = \bigotimes_{\xi<\lambda}\kappa_\xi \le \bigotimes_{\xi<\lambda}\kappa = \kappa^\lambda。\tag{5.21}$$

□

接下来这个定理属于寇尼希，寇尼希引理5.3.7是它的推论。

5.4.6. 寇尼希定理 如果对任意 $i\in I$ 都有 $\kappa_i<\lambda_i$，则

$$\bigoplus_{i\in I}\kappa_i < \bigotimes_{i\in I}\lambda_i。\tag{5.22}$$

证明. 令 X_i 为基数为 λ_i 的集合并且 $X=\prod_{i\in I}X_i$，则 $\bigotimes_{i\in I}\lambda_i = |X|$。如果 $\bigoplus_{i\in I}\kappa_i \ge \bigotimes_{i\in I}\lambda_i$，则一定存在一个序列 $\{Y_i\}_{i\in I}$，其中每一 $Y_i\subset X$ 并且 $|Y_i|=\kappa_i$，而 $\bigcup_{i\in I}Y_i = X$。我们以下证明这是不可能的。

定义 $Z_i=\{f(i)\mid f\in Y_i\}$。由于 $|Y_i|<|X_i|$，所以 Z_i 是 X_i 的真子集。取 $f\in X$ 使得对任意 $i\in I$，$f(i)\notin Z_i$，则对任意 $i\in I$，$f\notin Y_i$，故 $\bigcup_{i\in I}Y_i\neq X$。 □

以下关于正则基数的刻画有很多应用。

5.4.7. 定理 设 κ 是无穷基数，则以下命题等价：

(1) κ 是正则基数；

(2) 如果 $A\subseteq\kappa$，并且 $|A|<\kappa$，则 A 在 κ 中有界，即存在 $\alpha<\kappa$，$A\subseteq\alpha$；

(3) 如果 $|I|<\kappa$，而 $\{\kappa_i \mid i\in I\}$ 为一集基数，并且对任意 $i\in I$，$\kappa_i<\kappa$，则 $\bigoplus_{i\in I}\kappa_i<\kappa$；

(4) 令 $\lambda<\kappa$，如果长度为 λ 的序列 $\langle X_\xi\rangle_{\xi<\lambda}$ 满足对任意 $\xi<\lambda$，$|X_\xi|<\kappa$，则 $|\bigcup_{\xi<\lambda}X_\xi|<\kappa$。

证明.　　(1) ⇒ (2)。如果 A 是无界的，则我们可以定义 A 到 κ 上的共尾映射。这样 $\mathrm{cf}(\kappa) \le |A| < \kappa$，矛盾。

(2) ⇒ (3)。由 (2)，集合 $\{\kappa_i \mid i \in I\} \subseteq \kappa$ 在 κ 中有界，所以 $\sup_{i\in I} \kappa_i < \kappa$。假设 $|I| = \lambda$，注意到 $\lambda < \kappa$。根据命题5.4.2，$\bigoplus_{i\in I} \kappa_i = \lambda \otimes \sup_{i\in I} \kappa_i = \max(\lambda, \sup_{i\in I} \kappa_i) < \kappa$。

(3) ⇒ (4)。假设每个 X_ξ 的基数是 κ_ξ，则 $|\bigcup_{\xi<\lambda} X_\xi| \le \bigoplus_{\xi<\lambda} \kappa_\xi$，由 (2)，它严格小于 κ。

(4) ⇒ (1)。如果 κ 是奇异基数，$\mathrm{cf}(\kappa) < \kappa$。令 $f : \mathrm{cf}(\kappa) \to \kappa$ 是共尾映射，注意到，对任意 $\xi < \mathrm{cf}(\kappa)$，$|f(\xi)| < \kappa$，但是 $|\bigcup_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} f(\xi)| = \kappa$，与 (4) 矛盾。 □

关于基数的加法和乘法，我们有非常平凡的计算方法。甚至对于无穷和与无穷积，我们也能找到一些类似于有穷情形下的运算规则。但基数的幂运算却是一个棘手问题。我们已经讨论过 2^κ，目前只知道它的共尾数严格大于 κ，其他则一无所知。而对于 κ^λ，除了知道它的共尾数大于 λ 外，也只是知道在 $\kappa \le \lambda$ 的情况下，它等于 2^λ，可这不过是把无知归于无知！本章后面的内容可以看作是对幂函数的探讨，目的是努力寻找一些限制，或者说规律。

5.4.8. **定理** *假设 α,β 是序数，*

(1)　(豪斯道夫公式) $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1} \otimes \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$；

(2)　(塔斯基公式) 如果 $|\gamma| \le \aleph_\beta$，则 $\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|} \otimes \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$。

证明.　　(1)　如果 $\alpha < \beta$，则根据命题5.2.10，$\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta}$，而 $\aleph_{\alpha+1} < 2^{\aleph_\beta}$，所以 $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} = \aleph_{\alpha+1} \otimes \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$。如果 $\beta \le \alpha$，可以把集合 $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$ (即从 $\aleph_\beta$ 到 $\aleph_{\alpha+1}$ 的全体函数组成的集合) 看作 $\bigcup_{\gamma<\aleph_{\alpha+1}} \gamma^{\aleph_\beta}$，(其中 $\gamma^{\aleph_\beta}$ 是 $\aleph_\beta$ 到 γ 的全体函数组成的集合。) 而这个集合的基数不大于 $\bigotimes_{\gamma<\aleph_{\alpha+1}} \gamma^{\aleph_\beta}$，后者也不大于 $\aleph_{\alpha+1} \otimes \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$，这就证明了 $\aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta} \le \aleph_{\alpha+1} \otimes \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$；而另一个方向是显然的，因为 $\aleph_{\alpha+1} \le \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$ 并且 $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \le \aleph_{\alpha+1}^{\aleph_\beta}$。

(2)　与 (1) 类似，其中一个方向，即，$\aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|} \otimes \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \le \aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta}$，是显然的。我们对 γ 作归纳证明另一个方向。对于后继序数的情况，可由 (1) 和归纳假设容易得到。如果 γ 是极限序数，首先注意到 $\aleph_{\alpha+\gamma} \le \bigotimes_{\xi<\gamma} \aleph_{\alpha+\xi}$，

这是因为前者等于 $\sup\{\aleph_{\alpha+\xi} \mid \xi<\gamma\}$，它不大于 $\bigoplus_{\xi<\gamma}\aleph_{\alpha+\xi}$。这样，我们有 $\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \leq \bigotimes_{\xi<\gamma}\aleph_{\alpha+\xi}^{\aleph_\beta}$，而根据归纳假设 $\aleph_{\alpha+\xi}^{\aleph_\beta}=\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\otimes\aleph_{\alpha+\xi}^{|\xi|}$，所以

$$
\begin{aligned}
\aleph_{\alpha+\gamma}^{\aleph_\beta} \leq \bigotimes_{\xi<\gamma}\aleph_{\alpha+\xi}^{\aleph_\beta} &= \bigotimes_{\xi<\gamma}(\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\otimes\aleph_{\alpha+\xi}^{|\xi|}) \\
&= (\aleph_\alpha^{\aleph_\beta})^{|\gamma|}\otimes\bigotimes_{\xi<\gamma}\aleph_{\alpha+\xi}^{|\xi|} \\
&\leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta\otimes|\gamma|}\otimes(\aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|})^{|\gamma|} \\
&= \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\otimes\aleph_{\alpha+\gamma}^{|\gamma|}。
\end{aligned}
$$

□

5.4.9. 推论 如果 $n\in\omega$，则以下命题成立：

(1) （广义豪斯道夫公式）$\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta}=\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}\otimes\aleph_{\alpha+n}$；

(2) （伯恩斯坦公式）$\aleph_n^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\beta}\otimes\aleph_n$；

(3) 如果 $\alpha\leq\aleph_\beta$，则 $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}=2^{\aleph_\beta}\otimes\aleph_\alpha^{|\alpha|}$。

证明. 见习题5.6.23。 □

5.5 基数幂运算

我们继续讨论幂函数 κ^λ 以及连续统函数 2^κ。

5.5.1. 引理 令 κ,λ 为基数，

(1) 如果 κ 是无穷的而 $\lambda\geq\mathrm{cf}(\kappa)$，则

$$\kappa^\lambda=\left(\sup\{\mu^\lambda \mid \mu \text{ 是小于 } \kappa \text{ 的基数}\}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)}; \tag{5.23}$$

(2) 假设 κ 无穷而且 $0<\lambda<\mathrm{cf}(\kappa)$，则

$$\kappa^\lambda=\kappa\otimes\sup\{\mu^\lambda \mid \mu \text{ 是小于 } \kappa \text{ 的基数}\}=\kappa\otimes\bigoplus_{\mu \text{ 是小于 } \kappa \text{ 的基数}}\mu^\lambda。 \tag{5.24}$$

证明. (1) 令 $\mu=\sup\{\mu^\lambda \mid \mu \text{ 是小于 } \kappa \text{ 的基数}\}$。根据注5.4.3，我们令 $\langle\kappa_\xi \mid \xi<\mathrm{cf}(\kappa_\xi)\rangle$ 为满足 $\bigoplus_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\xi=\kappa$ 的序列，于是 $\kappa^\lambda=(\bigoplus_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\xi)^\lambda\leq(\bigotimes_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}\kappa_\xi)^\lambda\leq\bigotimes_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}\mu=\mu^{\mathrm{cf}(\kappa)}\leq(\kappa^\lambda)^{\mathrm{cf}(\kappa)}=\kappa^\lambda$。

(2) 因为 $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$，所以对每个 $f \in \kappa^\lambda$ 都存在 $\alpha < \kappa$ 使得 $f \in \alpha^\lambda$，因此集合 $\kappa^\lambda \subseteq \bigcup\{\alpha^\lambda \mid \alpha < \kappa\}$，这样，$\kappa^\lambda \leq |\bigcup\{\alpha^\lambda \mid \alpha < \kappa\}| \leq \bigoplus_{\alpha<\kappa} |\alpha|^\lambda \leq \bigoplus_{\mu \text{ 是小于 } \kappa \text{ 的基数}} \mu^+ \otimes \mu^\lambda \leq \kappa \otimes \bigoplus_{\mu \text{ 是小于 } \kappa \text{ 的基数}} \mu^\lambda \leq \kappa \otimes \sup\{\mu^\lambda \mid \mu \text{是小于 } \kappa \text{ 的基数}\} \leq \kappa^\lambda$。 □

5.5.2. **定义** 令 κ,λ 为基数，并且 $\lambda < \kappa$。如果对任意 $\mu < \kappa$，都有 $\mu^\lambda < \kappa$ 就称 κ 是λ-**强的**。如果对任意 $\lambda < \kappa$，κ 都是 λ-强的，就称 κ 是**是强极限的**。

5.5.3. **练习** 令 κ,λ 为无穷基数，

(1) κ 是强极限的当且仅当对任意 $\lambda < \kappa$，$2^\lambda < \kappa$；

(2) 如果 κ 不是 λ-强的，即存在 $\mu < \kappa$ 使得 $\mu^\lambda \geq \kappa$，则 $\kappa^\lambda = \mu^\lambda$。

我们可以把幂函数在 κ^λ 在 **ZFC** 下的行为总结如下：

5.5.4. **定理** 令 λ 为无穷基数，对任意无穷基数 κ，κ^λ 可计算如下：

(1) 如果 κ 不是 λ-强的，则存在 $\mu < \kappa$，$\kappa^\lambda = \mu^\lambda$；

(2) 如果 $\kappa \leq \lambda$，则 $\kappa^\lambda = 2^\lambda$；

(3) 如果 $\kappa > \lambda$ 并且 κ 是 λ-强的，则

(a) 如果 $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$，则 $\kappa^\lambda = \kappa$；

(b) 如果 $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda$，则 $\kappa^\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$。

证明. (1) 练习5.5.3 (2)。

(2) 命题5.2.10。

(3) 如果 $\kappa = \aleph_{\beta+1}$ 是后继基数，则 κ 是正则的，所以根据假设，只可能有 $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$。根据豪斯道夫公式，$\kappa^\lambda = \aleph_{\beta+1}^\lambda = \aleph_\beta^\lambda \otimes \aleph_{\beta+1} = \aleph_{\beta+1} = \kappa$。如果 κ 是极限基数，则必有 $\kappa = \sup\{\eta^\lambda \mid \eta \text{ 是小于 } \kappa \text{ 的基数}\}$，如果 $\mathrm{cf}(\kappa) > \lambda$，根据引理5.5.1 (2)，$\kappa^\lambda = \kappa \otimes \sup\{\eta^\lambda \mid \eta \text{是小于 } \kappa \text{ 的基数}\} = \kappa \otimes \kappa = \kappa$。如果 $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda$，则根据引理5.5.1 (1)，$\kappa^\lambda = \left(\sup\{\eta^\lambda \mid \eta \text{ 是小于 } \kappa \text{ 的基数}\}\right)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$。 □

5.5.5. 定义 无穷基数上的所谓**吉莫尔函数**（gimel function）定义为 $\gimel(\kappa) = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$。

吉莫尔函数的意义在于，我们可以利用它定义幂函数 κ^λ 和连续统函数 2^λ。

5.5.6. 推论 对任意无穷基数 κ,λ，

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} 2^\lambda, & \text{或} \\ \kappa, & \text{或} \\ \gimel(\mu), & \mathrm{cf}(\mu) \le \lambda < \mu。\end{cases}$$

证明. 显然 $\kappa^\lambda \ge 2^\lambda \otimes \kappa$，如果 $\kappa^\lambda > 2^\lambda \otimes \kappa$，找到使得 $\kappa^\lambda = \mu^\lambda$ 的最小的 μ。应用定理5.5.4于 μ,λ，则定理中的（1），（2）和（3a）都不成立，所以 $\kappa^\lambda = \mu^\lambda = \mu^{\mathrm{cf}(\mu)}$。 □

对于连续统函数 2^κ，除了单调性，即 $\kappa < \lambda$ 蕴涵 $2^\kappa \le 2^\lambda$，和寇尼希定理的限制，即 $\mathrm{cf}(2^\kappa) > \kappa$ 外，我们还有如下定理：

5.5.7. 定理 假设 κ 是无穷基数，则

（1） 如果 κ 是极限基数，则 $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)}$；

（2） 如果 κ 是强极限基数，则 $2^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$。

证明. （1） 因为 κ 是极限的，所以存在小于 κ 的基数序列 $\langle\kappa_\xi\rangle_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)}$，使得 $\kappa = \bigotimes_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi$。这样，

$$2^\kappa = 2^{\bigoplus_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} \kappa_\xi} = \bigotimes_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{\kappa_\xi} \le \bigotimes_{\xi<\mathrm{cf}(\kappa)} 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)}。\tag{5.25}$$

（2） $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} \le \kappa^\kappa = 2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$。 □

5.5.8. 定义 对任意基数 κ，如果存在 $\mu_0 < \kappa$ 使得对任意 $\mu_0 \le \mu < \kappa$，$2^\mu = 2^{\mu_0}$，则称 2^{μ_0} 为**连续统函数在 κ 下的不动点**。如果这样的不动点存在，也称连续统函数在κ **下终究为常量**（eventually constant below κ）。

5.5.9. 推论 令 κ 为奇异基数，并且连续统函数在 κ 下存在不动点 2^{μ_0}，则 $2^\kappa = 2^{\mu_0}$。

证明. 显然，$2^{<\kappa} = 2^{\mu_0}$，由于 κ 是奇异的，因此可以找到 $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \mu < \kappa$ 使得 $2^\mu = 2^{\mu_0} = 2^{<\kappa}$。而根据定理5.5.7，$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = (2^\mu)^{\mathrm{cf}(\kappa)} = 2^\mu = 2^{\mu_0}$。 □

以上这些结论允许我们用吉莫尔函数来定义连续统函数。

5.5.10. 推论 假设 κ 是无穷基数，则

$$2^\kappa = \begin{cases} \gimel(\kappa), & \text{如果 } \kappa \text{ 是后继基数；} \\ 2^{\mu_0} \otimes \gimel(\kappa), & \text{如果 } \kappa \text{ 是极限基数} \\ & \text{并且 } 2^{\mu_0} \text{ 是连续统函数在 } \kappa \text{ 下的不动点；} \\ \gimel(2^{<\kappa}), & \text{如果 } \kappa \text{ 是极限基数} \\ & \text{并且连续统函数在 } \kappa \text{ 下不存在不动点。} \end{cases}$$

证明. 如果 κ 是后继的，则 $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa$，所以 $2^\kappa = \kappa^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$；假设 κ 是极限的并且 2^{μ_0} 是连续统函数在 κ 下的不动点，此时，若 κ 是正则的，则由寇尼希定理（定理5.4.6）$2^\kappa = \gimel(\kappa) > 2^{\mu_0}$。反过来若 κ 是奇异的，则由推论5.5.9及定理5.5.7，$2^{\mu_0} = 2^\kappa \geq \gimel(\kappa)$。

最后，如果 κ 是极限的并且连续统函数在 κ 下没有不动点，则 $2^{<\kappa}$ 是一个长度为 κ 的递增序列的上确界，所以 $\mathrm{cf}(2^{<\kappa}) = \mathrm{cf}(\kappa)$。

□

如果广义连续统假设 **GCH** 成立，即 $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$，则幂函数 κ^λ 的计算也会相对简单：

5.5.11. 定理 令 κ,λ 为无穷基数，同时假设广义连续统假设成立，则

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} \lambda^+, & \text{如果 } \kappa \leq \lambda; \\ \kappa^+, & \text{如果 } \mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa; \\ \kappa, & \text{如果 } \lambda < \mathrm{cf}(\kappa)\text{。} \end{cases}$$

证明. 如果 $\kappa \leq \lambda$，则根据命题5.2.10，$\kappa^\lambda = 2^\lambda = \lambda^+$；如果 $\mathrm{cf}(\kappa) \leq \lambda < \kappa$，根据寇尼希引理，$\kappa^\lambda \geq \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$；另一方面，根据命题5.2.10，$\kappa^\lambda \leq \kappa^\kappa = 2^\kappa = \kappa^+$；如果 $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$，则由引理5.5.1，$\kappa^\lambda = \kappa \otimes \sup\{\eta^\lambda \mid \eta$ 是小于 κ 的基数$\}$。由于 $\eta^\lambda \leq (2^\eta)^\lambda = 2^{\eta\otimes\lambda} = (\eta\otimes\lambda)^+ \leq \kappa$，所以 $\kappa^\lambda = \kappa$。 □

5.5.12. **奇异基数假设** (**SCH**) 对任意无穷基数 κ，如果 $2^{\mathrm{cf}(\kappa)} < \kappa$，则 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$。

由于我们知道 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$，所以 κ^+ 是 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$ 最小的可能性。而奇异基数假设最早的形式是说连续统函数在强极限的奇异基数处总是取最小的可能性，即

$$\text{如果 } \kappa \text{ 是强极限的奇异基数，则 } 2^\kappa = \kappa^+。 \tag{SCH$'$}$$

5.5.13. **注**

(1) 显然，**SCH** 蕴涵 **SCH′**：如果 κ 是强极限的奇异基数，则 **SCH** 的前提满足，故 $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} = \kappa^+$，而根据定理5.5.7 (2)，$2^\kappa = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$。但是反之不成立，我们可以构造一个集合论的模型，在其中 **SCH′** 成立而 **SCH** 不成立。

(2) 同样显然的是 **GCH** 蕴涵 **SCH**：应用定理5.5.11，令 $\lambda = \mathrm{cf}(\kappa)$。

5.5.14. **定理** 假设 κ 是奇异基数，并且 **SCH** 成立，则

$$2^\kappa = \begin{cases} 2^{\mu_0}, & \text{如果 } 2^{\mu_0} \text{ 是连续统函数在 } \kappa \text{ 下的不动点；} \\ (2^{<\kappa})^+, & \text{如果连续统函数在 } \kappa \text{ 下没有不动点。} \end{cases} \tag{5.26}$$

证明. 如果连续统函数在 κ 下有不动点 2^{μ_0}，则推论5.5.10告诉我们 $2^\kappa = 2^{\mu_0}$；否则，我们有 $\mathrm{cf}(2^{<\kappa}) = \mathrm{cf}(\kappa)$，根据推论5.5.10，$2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(\kappa)} = (2^{<\kappa})^{\mathrm{cf}(2^{<\kappa})}$，再由 **SCH**，这就是 $(2^{<\kappa})^+$。 □

在奇异基数假设下，基数的幂函数可由连续统函数计算。

5.5.15. **定理** 令 κ,λ 是无穷基数，同时假设 **SCH** 成立，

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} 2^\lambda, & \text{如果 } \kappa \le 2^\lambda\text{；} \\ \kappa^+, & \text{如果 } \kappa > 2^\lambda \text{ 但是 } \mathrm{cf}(\kappa) \le \lambda\text{；} \\ \kappa, & \text{如果 } \kappa > 2^\lambda \text{ 并且 } \mathrm{cf}(\kappa) > \lambda\text{。} \end{cases} \tag{5.27}$$

证明. $\kappa \le 2^\lambda$ 情形是显然的; 假设 $2^\lambda < \kappa$, 我们施归纳于 κ。如果 $\kappa = \mu^+$ 是后继基数, 则根据归纳假设, $\mu^\lambda \in \{2^\lambda, \mu^+, \mu\}$, 所以 $\mu^\lambda \le \kappa$。而 $\kappa^\lambda = (\mu^+)^\lambda$, 由豪斯道夫公式，它等于 $\mu^+ \otimes \mu^\lambda = \kappa$；如果 κ 是极限基数，同样根据归纳假设，对任意 $\mu < \kappa$，$\mu^\lambda < \kappa$，即 κ 是 λ-强的基数，应用定理5.5.4 (3)，如果 $\lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$，则 $\kappa^\lambda = \kappa$，如果 $\mathrm{cf}(\kappa) \le \lambda$，则 $\kappa^\lambda = \kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}$，再由 **SCH**，它等于 κ^+。 □

5.6 习题

5.6.1. κ 是无穷后继基数当且仅当存在序数 α，$\kappa = \aleph_{\alpha+1}$；$\kappa$ 是无穷极限基数当且仅当存在极限序数 γ，使得 $\kappa = \aleph_\gamma$。

5.6.2. 如果 $\alpha < \beta$，则 $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$。

5.6.3. 以下公式中的幂运算是指序数的幂运算。

(1) 如果 $\alpha < \omega_1$，则 $\omega^\alpha < \omega_1$；

(2) $\omega^{\omega_1} = \omega_1$；

(3) $\{\alpha < \omega_1 \mid \omega^\alpha = \alpha\}$ 是不可数的。

5.6.4. 证明定理5.2.9:

(1) $\kappa^{\lambda \oplus \mu} = \kappa^\lambda \otimes \kappa^\mu$；

(2) $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \otimes \mu}$；

(3) $(\kappa \otimes \lambda)^\mu = \kappa^\mu \otimes \lambda^\mu$；

(4) $2^\kappa > \kappa$。

5.6.5. 证明:

(1) n-维空间 $|\mathbb{R}^n|$ 中所有点的集合，其基数为 $2^{\aleph_0}$;

(2) 全体自然数的无穷序列的集合 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，其基数为 $2^{\aleph_0}$;

(3) 全体实数的无穷序列的集合 $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$，其基数为 $2^{\aleph_0}$。

5.6.6. 假设 κ 是无穷基数，$\lambda \leq \kappa$,

(1) 令 $X = \{f \in \lambda^\kappa \mid f \text{ 是满射。}\}$，证明 $|X| = \lambda^\kappa$;

(2) 令 $Y = \{f \in \kappa^\lambda \mid f \text{ 是单射。}\}$，证明 $|Y| = \kappa^\lambda$;

(3) 令 $Z = \{f \in \kappa^\kappa \mid f \text{ 是双射。}\}$，证明 $|Z| = \kappa^\kappa$。

5.6.7. 如果 A 是无穷集合，则 A 上存在 $2^{|A|}$ 个等价关系。

5.6.8. 共尾的概念可以推广到任何集合 X 和关系 $R \subseteq X \times X$ 上，称集合 $Y \subseteq X$ 在 (X, R) 中是无界的，如果对任意 $x \in X$，存在 $y \in Y$ 使得 xRy，定义:

$$\mathrm{cf}(X, R) = \min\left\{|Y| \mid Y \text{ 在 } (X, R) \text{ 中无界}\right\}。$$

现在假设 $(X, \leq)$ 是线序集，证明 $\mathrm{cf}(X, \leq)$ 为 0 或 1 或某个正则基数。举例说明这对偏序集不成立。

5.6.9. 假设 κ 是无穷基数，$\succ$ 是 2^κ 上的字典序。证明 $(2^\kappa, \succ)$ 上不存在长度为 κ^+ 的严格递增或严格递减序列。

5.6.10. 如果 $2^{\aleph_0} > \aleph_\omega$，则 $\aleph_\omega^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$。

5.6.11. 如果 $\alpha < \omega_1$ 是极限序数，则 $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$。

5.6.12. 所有正则序数都是基数。 [提示：令 $\beta = |\mathrm{cf}(\alpha)|$，证明：$\alpha = \mathrm{cf}(\alpha) \leq \beta$。]

5.6.13. 对任意无穷基数 κ，κ 是奇异的当且仅当 $\kappa = \bigoplus_{i \in I} \kappa_i$，其中 $|I| < \kappa$，而且对任意 $i \in I$，$\kappa_i < \kappa$。

5.6.14. 如果对每一 $\xi \in \lambda$，都有 $\kappa_\xi = \kappa$，则 $\bigotimes_{\xi<\lambda} \kappa_\xi = \kappa^\lambda$。

5.6.15. 证明命题5.4.4，即，假设 $\langle \kappa_i \rangle_{i \in I}$ 为基数的序列，而 λ 为基数，则

(1) 如果 $\{X_j \mid j \in J\}$ 是 I 的划分，则

(a) （交换律和结合律）

$$\bigoplus_{i \in I} \kappa_i = \bigoplus_{j \in J} \bigoplus_{i \in X_j} \kappa_i, \qquad \bigotimes_{i \in I} \kappa_i = \bigotimes_{j \in J} \bigotimes_{i \in X_j} \kappa_i;$$

(b) （分配律）

$$\bigotimes_{j \in J} \bigoplus_{i \in X_j} \kappa_i = \bigoplus \left\langle \bigotimes_{j \in J} \kappa_{f(j)} \mid f \in \prod_{j \in J} X_j \right\rangle;$$

(2) $\lambda \cdot \bigoplus_{i \in I} \kappa_i = \bigoplus_{i \in I} \lambda \cdot \kappa_i$;

(3) $\lambda^{\bigoplus_{i \in I} \kappa_i} = \bigotimes_{i \in I} \lambda^{\kappa_i}$;

(4) $(\bigotimes_{i \in J} \kappa_i)^\lambda = \bigotimes_{i \in I} \kappa_i^\lambda$。

5.6.16. 假设 κ,λ 是无穷基数，运用寇尼希定理重新证明以下命题

(1) $\kappa < 2^\kappa$;

(2) $\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)} > \kappa$;

(3) $\mathrm{cf}(\kappa^\lambda) > \lambda$。

5.6.17. 如果 γ 是极限序数，而 $\langle \alpha_\eta \rangle_{\eta<\gamma}$ 为序数的序列，并且 $\sup_{\eta<\gamma} \alpha_\eta = \alpha$，则 $\bigoplus_{\eta<\gamma} \aleph_{\alpha_\eta} = \aleph_\alpha$；特别地，$\bigoplus_{\eta<\gamma} \aleph_\eta = \aleph_\gamma$。

5.6.18. 如果 κ 是无穷基数，$\mu < \mathrm{cf}(\kappa)$ 是基数，$\langle \kappa_\xi \mid \xi < \mu \rangle$ 是基数的序列，并且每个 κ_ξ 都小于 κ，证明：$\bigoplus_{\xi<\mu} \kappa_\xi < \kappa$。

5.6.19. 证明：$\aleph_\omega^{\aleph_0} = \bigotimes_{n \in \omega} \aleph_n$。

5.6.20. 假设 κ 是无穷基数，则 $(\kappa^+)^\kappa = 2^\kappa$。

5.6.21. 假设 κ 是无穷基数，则 $2^\kappa = (\bigotimes_{\eta \text{ 是小于 } \kappa \text{ 的基数}} 2^\eta)^{\mathrm{cf}(\kappa)}$。

5.6.22. 运用塔斯基公式证明：$\bigotimes_{\alpha<\aleph_1+\omega} \aleph_\alpha = \aleph_{\aleph_1+\omega}^{\aleph_1}$。

5.6.23. 证明推论5.4.9，即，如果 $n \in \omega$，则以下命题成立：

(1) （广义豪斯道夫公式）$\aleph_{\alpha+n}^{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} \otimes \aleph_{\alpha+n}$；

(2) （伯恩斯坦公式）$\aleph_n^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \otimes \aleph_n$；

(3) 如果 $\alpha \leq \aleph_\beta$，则 $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = 2^{\aleph_\beta} \otimes \aleph_\alpha^{|\alpha|}$。

5.6.24. 对任意极限序数 γ，$\bigotimes_{\xi<\gamma} 2^{\aleph_\xi} = 2^{\aleph_\gamma}$。

5.6.25. 如果 κ 是强极限的基数，则 $\mathrm{cf}(\kappa^{\mathrm{cf}(\kappa)}) > \kappa$。

5.6.26. 假设 κ 是正则基数，而对任意小于 κ 的基数 μ，$2^\mu \leq \kappa$，证明：$\bigoplus_{\mu \text{ 是小于 } \kappa \text{ 的基数}} \kappa^\mu = \kappa$。

5.6.27. 如果 $\kappa = \lambda^+$，则 $\bigoplus_{\mu \text{ 是小于 } \kappa \text{ 的基数}} \kappa^\mu = 2^\lambda$。

5.6.28. 判断一下命题是否成立：如果 κ,λ 是基数，而且 $0 < \lambda < \mathrm{cf}(\kappa)$，则 $\kappa^\lambda = \bigoplus_{\mu \text{ 是小于 } \kappa \text{ 的基数}} \mu^\lambda$。

5.6.29. 假设 γ 是极限序数，α 是序数且满足 $\aleph_\alpha < \mathrm{cf}(\gamma)$，证明：

$$\aleph_\gamma^{\aleph_\alpha} = \bigoplus_{\xi<\gamma} \aleph_\xi^{\aleph_\alpha} = \sup\left\{\aleph_\xi^{\aleph_\alpha} \mid \xi < \gamma\right\}。$$

5.6.30. 如果 κ 是 μ-强基数，则 κ^+ 亦是 μ-强的。

5.6.31. 递归定义**贝茨函数**（beth fuction）$\beth_\alpha$ 为：$\beth_0 = \aleph_0$，$\beth_{\alpha+1} = 2^{\aleph_\alpha}$，对于极限序数 γ，$\beth_\gamma = \sup\left\{2^\xi \mid \xi < \gamma\right\}$。注意到，广义连续统假设 **GCH** 可表示为：对任意序数 α，$\beth_\alpha = \aleph_\alpha$。证明：$|V_{\omega_\alpha}| = \beth_\alpha$。

5.6.32. 如果 $2^{\aleph_1} < \aleph_\omega$ 并且 $\daleth(\aleph_\omega) > \aleph_{\omega_1}$，则 $\daleth(\aleph_{\omega_1}) = \daleth(\aleph_\omega)$。

5.6.33. 如果 $2^{\aleph_0} \geq \aleph_{\omega_1}$，则 $\beth(\aleph_\omega) = 2^{\aleph_0}$ 并且 $\beth(\aleph_{\omega_1}) = 2^{\aleph_1}$。

5.6.34. 假设 $\kappa \geq 2$，$\lambda \geq \omega$ 是基数，并且 $\mathrm{cf}(\kappa^{<\lambda}) > \lambda$，证明连续统函数在 λ 下存在不动点。

第六章　滤、理想与无界闭集

"每个自然数是四个平方数的和"比"存在一个不可达基数"更是真的吗？我认为不是［它只是更显然］，但又不完全确定。

罗伯特·索洛维

我们首先引进滤和理想的概念，它们在数学和逻辑的很多领域都有十分重要的应用。

6.1　集合上的滤

直观上，对任意集合 S，S 上的滤是 S 的"大"子集的族，举例来说，考虑实数的单位区间 $A=[0,1]\subseteq\mathbb{R}$，$\mu$ 为勒贝格测度。对任意 $X\subseteq A$，$\mu(X)=r$ 表示"X 是勒贝格可测的且 $\mu(X)=r$"，其中 $r\in A$ 是实数。令 $F=\{X\subseteq A\mid \mu(X)=1\}$ 为 A 的测度为 1 的子集族，则 F 的元素是 A 的那些"大的"或"几乎无处不在的"子集，A 具有如下性质：(i) A 本身是"大的"而空集不是"大的"，即 $A\in F$，$\emptyset\notin F$；(ii) 如果 X 是"大的"，即 $X\in F$，而 $X\subseteq Y$，则 Y 也是"大的"，即 $Y\in F$；(iii) 如果 X,Y 都是"大的"，即 $X,Y\in F$，则 $X\cap Y$ 也是"大的"（两个测度为 1 的集合相交测度仍为 1，这正是"几乎无处不在"的体现。）即 $X\cap Y\in F$。具有以上性质的子集族 F 就称为单位闭区间上的**滤**，有时称一个性质 $\varphi(x)$ 在单位区间上是**几乎处处成立的**，如果 $\{x\in A\mid\varphi(x)\}\in F$。

6.1.1. **定义**　令 S 为非空集合。S 的子集族 $F\subseteq\mathcal{P}(S)$ 如果满足：

(1) $S \in F$ 且 $\emptyset \notin F$；

(2) $X, Y \in F$ 蕴涵 $X \cap Y \in F$；

(3) $X \in F$ 且 $X \subseteq Y \subseteq S$ 蕴涵 $Y \in F$,

则称 F 为S **上的滤**。

6.1.2. **例**

(1) $F = \{S\}$ 是 S 上的滤，它也是 S 上最小的滤，是 S 上任何滤的子集。我们称之为**平凡滤**。

(2) 令 $A \subseteq S$ 非空，定义

$$F = \{X \subseteq S \mid A \subseteq X\}, \tag{6.1}$$

则 F 是 S 上的滤，我们称之为由 A 生成的 S 上的**主滤**。

(3) 在上例中，如果 $A = \{a\}$ 是单点集，假设由 a 生成的主滤为 F，则不存在 S 上的滤 F' 满足 $F \subset F'$。反设存在这样的滤 F'，则 $F' - F \neq \emptyset$，令 X 属于这个差。由于 $X \notin F$，所以 $a \notin X$；又由于 $X \in F'$ 且 $\{a\} \in F'$，故 $\emptyset = \{a\} \cap X \in F'$，与滤的定义矛盾。对任意滤 F，如果不存在 F' 使得 $F \subset F'$，则称 F 为**极大滤**。

(4) 取无穷集 S，定义

$$F = \{X \subseteq S \mid S - X \text{ 是有穷的}\}, \tag{6.2}$$

则 F 是 S 上的滤，称为**弗雷歇滤** (Fréchet filter)。但 F 不是主滤，对任意 $A \in F$，即 $S - A$ 有穷，总存在 A 的真子集 X，例如令 $X = A - \{a\}$，其中 $a \in A$，使得 $S - X$ 也有穷，即 $X \in F$。

(5) 令 κ 为无穷基数，$\{X \subseteq \kappa \mid |\kappa - X| < \kappa\}$ 是 κ 上的滤。

与滤对偶的概念是理想。直观上，S 上的理想是 S 的“小”子集的族。还是以 $[0,1]$ 区间上的测度为例，令 $I = \{X \subseteq A \mid \mu(X) = 0\}$ 为测度为 0 的集合族，则 I 的元素是 A 的那些“小的”或“几乎处处不在”的集合，I 有如下性质：(i) 空集是“小的”，即 $\emptyset \in I$； (ii) 如果 X 是小的而 $Y \subseteq X$，则 Y 也是“小的”，即 $X \in I$ 且 $Y \subseteq X$ 蕴涵 $Y \in I$； (iii) 如果 X, Y 是小的，则它们的并也是小的（两个零测集的并还是零测集，这是“几乎处处不在”的体现），即 $X \cup Y \in I$。具有以上性质的 A 的子集族称为 A 上的**理想**，有时称一个性质 $\varphi(x)$ 在单位区间上是**几乎处处不成立的**，如果 $\{x \in A \mid \varphi(x)\} \in I$。

6.1.3. **定义** 令 S 为非空集合。S 的子集族 $I \subseteq \mathcal{P}(S)$ 如果满足：

(1) $\emptyset \in I$ 且 $S \notin I$；

(2) $X, Y \in I$ 蕴涵 $X \cup Y \in I$；

(3) $X \in I$ 且 $Y \subseteq X$ 蕴涵 $Y \in I$，

则称 I 为S **上的理想**。

6.1.4. **例**

(1) 与滤类似，$\{\emptyset\}$ 是 S 上的**平凡理想**。对任意 $A \subseteq S$，

$$I = \{X \mid X \subseteq A\}, \tag{6.3}$$

称为由 A 生成的 S 上的**主理想**。

(2) 如果 F 是 S 上的滤，则

$$I = \{S - X \mid X \in F\} \tag{6.4}$$

是 S 上的理想；反之亦然：如果 I 是 S 上的理想，则

$$F = \{S - X \mid X \in I\} \tag{6.5}$$

是 S 上的滤。有这种关系的一对概念一般称之为**对偶的** 。

(3) 对任意无穷集合 S，S 的所有有穷集组成的集合族 I 是 S 上的理想，它是弗雷歇滤的对偶，称为**弗雷歇理想**。弗雷歇理想不是主理想。

(4) 如果 κ 是无穷基数，$I = \{X \subseteq \kappa \mid |X| < \kappa\}$ 是 κ 上的理想。

6.1.5. **定义** 对任意集合族 G，如果 G 的任意有穷子集 H 都满足 $\bigcap H \neq \emptyset$，则称 G 具有**有穷交性质**。

显然，由滤的定义，任何滤都有有穷交性质，反之：

6.1.6. **命题** 任取集合 S，令 $G \subseteq \mathcal{P}(S)$ 为具有有穷交性质的非空集合族，则存在 S 上的滤 F 使得 $G \subseteq F$。

证明. 定义 F 为:

$$F = \left\{X \mid \text{存在}G\text{的有穷子集}H\text{满足}\bigcap H \subseteq X\right\}。\tag{6.6}$$

显然，$S \in F$，由于 G 有有穷交性质，故 $\emptyset \notin F$；如果 $X_1, X_2 \in F$，则存在 G 的有穷子集 H_1, H_2，$\bigcap H_1 \subseteq X_1$ 且 $\bigcap H_2 \subseteq X_2$。注意到 $H = H_1 \cup H_2$ 是 G 的有穷子集，而 $\bigcap H = \bigcap H_1 \cap \bigcap H_2 \subseteq X_1 \cap X_2$，故 $X_1 \cap X_2 \in F$，这就证明了 F 是滤，因为滤的第三个条件是显然满足的。 □

事实上，(6.6) 式定义的滤是以 G 为子集的最小的滤，因此它被称为 G **生成**的滤。

接下来一个自然的问题是：是否每个集合要么是大的要么是小的呢？这就引出了超滤（素理想）的概念。

6.1.7. **定义** *S 上的滤 U 如果满足对任意 $X \subseteq S$，或者 $X \in U$ 或者 $S - X \in U$，则称 U 为***超滤**。

*S 上的理想 I 如果满足对任意 $X \subseteq S$，或者 $X \in I$ 或者 $S - X \in I$，则称 I 为***素理想**。

超滤与素理想为对偶概念。

6.1.8. **例** 令 $a \in S$，则 $F = \{X \subseteq S \mid a \in X\}$ 是主滤，但显然它也是超滤，因为对任意 $X \subseteq S$，$a \in X$ 或 $a \notin X$。这样的滤称为 S 上的**主超滤**。

6.1.9. **练习** 假设 $A \subseteq S$ 为非空子集，$F = \{X \subseteq S \mid A \subseteq X\}$ 是主滤，则以下命题等价:

(1) A 是单点集;

(2) F 是超滤;

(3) F 是主超滤。

S 上的滤 F 把 S 的子集族分为“大的”和“小的”。超滤的意思是说这种划分是“完全的”，即任何子集或者在 F 中，或者它的补集在 F 中。而极大滤的意思是说这种划分是“彻底”的，即所有“大的”集合都已经放到 F 中了。以下命题证明“完全的”就是“彻底的”。

6.1.10. **命题** 集合 S 上的滤 F 是超滤当且仅当 F 是 S 上的极大滤。

证明. 假设 F 是超滤，则 F 是极大的，因为否则就存在滤 G 使得 $G - F$ 非空。令 $X \in (G - F)$，由于 $X \notin F$ 而 F 是超滤，故 $S - X \in F$，因此 $S - X \in G$，这蕴涵 $X \cap (S - X) = \emptyset \in G$，矛盾。

假设 F 不是超滤，则存在 X，X 和 $S - X$ 都不属于 F。令 $G = F \cup \{X\}$，任取 G 的有穷子集 $Y = \{X_1, \cdots, X_n\}$，若 $X \notin Y$，则显然 $\bigcap Y \neq \emptyset$；若 $X \in Y$，令 $Y' = Y - \{X\}$，则 $\bigcap Y = \bigcap Y' \cap X$ 亦非空：否则 $\bigcap Y' \subseteq (S - X)$，而这蕴涵着 $S - X \in F$，矛盾。以上论证表明 G 有有穷交性质。根据引理6.1.6，存在 S 上的滤 F' 满足 $F \cup \{X\} \subseteq F'$，$F$ 不是极大的。 □

以下定理属于塔斯基，它是说任何滤都可扩张为超滤，因此又称为**超滤存在定理**。定理的证明需要用到选择公理的等价形式佐恩引理。超滤存在定理在 **ZF** 中是不可证的。

6.1.11. **定理** 集合 S 上的任何滤 F_0，都存在超滤 G 使得 $F_0 \subseteq G$。

证明. 令 $\Gamma = \{F \mid F\text{是}S\text{上的滤且}F_0 \subseteq F\}$。考虑偏序集 $(\Gamma, \subset)$。如果 Γ' 是 Γ 中的链，则容易验证 $F = \bigcup \Gamma'$ 是 S 上的滤且 $F \in \Gamma$，因此 Γ 的任意链都有上界。根据佐恩引理，Γ 有极大元 G，显然 G 是极大的，因此是超滤。 □

前面已经提到，任何滤都对有穷交封闭，而对偶地，任何理想都对有穷并封闭。但是，也有一些滤（理想）对更大的交（并）封闭，于是我们引入以下概念。

6.1.12. **定义** 对任意无穷基数 κ，如果集合 S 上的滤 F 满足：如果 $F' \subseteq F$ 且 $|F'| < \kappa$，则 $\bigcap F' \in F$，就称 F 是 κ-**完全的**；

对任意无穷基数 κ，如果集合 S 上的理想 I 满足：如果 $I' \subseteq I$ 且 $|I'| < \kappa$，则 $\bigcup I' \in I$，就称 I 是 κ-**完全的**。

对任意无穷基数 κ，κ-完全滤和 κ-完全理想是对偶概念。

6.1.13. **注** 任何滤和理想都是 $\aleph_0$-完全的；历史上，$\aleph_1$-完全的滤和理想又称为 σ-**完全的**。这里需要注意：可数完全的滤是对有穷交封闭的，$\aleph_1$-完全的滤才对可数交封闭。

6.1.14. **练习**

(1) 如果 S 是可数的，则 S 上的所有 $\aleph_1$-完全滤都是主滤；

(2) 如果 S 不可数，则 $\{X \subset S \mid |X| \leq \aleph_0\}$ 是 S 上 $\aleph_1$-完全的理想；

(3) 更一般地，如果 $\kappa > \aleph_1$ 是正则的，而 $|S| \geq \kappa$，则 $\{X \subset S \mid |X| < \kappa\}$ 是 κ-完全的理想；

(4) $[0,1]$ 区间上测度为 1 的集合构成的滤 F 是 $\aleph_1$-完全的，但不是 $(2^{\aleph_0})^+$-完全的。

6.2 无界闭滤

本节我们讨论一类特殊的滤，它在现代集合论中扮演着十分重要的角色。

6.2.1. **定义** 令 α 为极限序数，α 的子集 $C \subseteq \alpha$ 如果满足：

(1) C 在 α 中无界，即 $\sup C = \alpha$，或等价地，对任意 $\beta < \alpha$，存在 $\xi \in C$，$\beta < \xi$；

(2) C 在 α 中是**闭的**，即，对任意极限序数 $\gamma < \alpha$，如果 $\sup(C \cap \gamma) = \gamma$，则 $\gamma \in C$，

就称 C 是 α 的**无界闭集**。

6.2.2. **注** 假设 C 是极限序数 α 的子集，如果 γ 是 C 某一子集的上确界并且 $\gamma < \alpha$，则称 γ 是 C 的**极限点**。因此，C 在 α 中是闭集当且仅当 C 的极限点都属于 C。

6.2.3. **练习** 回忆拓扑的概念。对任意非空的序数集合 X，令

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} = \{(\xi,\eta) \mid \xi,\eta \in X\} \cup \{\xi \cap X \mid \xi \in X\} \\
\cup \{X - (\xi+1) \mid \xi \in X\} \cup \{X\}。
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

为拓扑基，则由 $\mathcal{B}$ 生成的拓扑称为 X 上的**序拓扑**。证明：定义中的闭集与 α 上序拓扑中闭集的意义一致。

以下讨论无界闭集的一些基本性质。

6.2.4. **引理** 假设 α 是极限序数，并且 $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，则

(1) α 是 α 上的无界闭集；

(2) 任取 $\beta < \alpha$，则集合 $\{\delta < \alpha \mid \delta > \beta\}$ 是 α 上的无界闭集；

(3) 集合 $X = \{\beta < \alpha \mid \beta \text{ 是极限序数}\}$ 是 α 上的无界闭集；

(4) 如果 X 在 α 中无界，则

$$X' = \{\gamma \in X \mid \gamma < \alpha \wedge \text{ 是 } X \text{ 的极限点}\}$$

是 α 上的无界闭集。

证明. (1)，(2) 留给读者。

(3) X 显然是闭集。为证 X 是无界的，任取 $\xi \in \alpha$，定义序列

$$\xi = \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n, \cdots \quad (n \in \omega),$$

其中 ξ_{n+1} 是严格大于 ξ 并且属于 α 的最小序数。令 η 为以上序列的极限，则 $\eta > \xi$ 并且属于 X。

(4) X' 是无界的可用类似 (3) 中的方法证明：任取 $\xi \in \alpha$，定义严格递增的序列 $\langle \xi_n \rangle_{n \in \omega}$，其中每个 $\xi_n \in X$。这个序列的极限 η 是 X 的极限点，所以属于 X' 并且大于 ξ。为证明 X' 是闭集，任取 $\eta < \alpha$ 是 X' 的极限点，即，$\sup(X' \cap \eta) = \eta$，则对任意 $\sigma < \eta$，存在 X 的极限点 $\xi < \eta$ 使得 $\sigma + 1 < \xi$。由极限点的定义，存在 $\mu \in X \cap \xi$，使得 $\sigma < \mu$，所以 $\sup(X \cap \eta) = \eta$，即 η 也是 X 的极限点，故 $\eta \in X'$。 □

6.2.5. **引理** 如果 α 是极限序数并且 $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，而 $f : \alpha \to \alpha$ 是严格递增的，并且是**连续的**，即对任意极限 $\beta < \alpha$，$f(\beta) = \bigcup_{\gamma<\beta} f(\gamma)$，则

(1) f 的值域是 α 的无界闭集；

(2) 反之，如果 α 是还是正则的，则 α 中的每个无界闭集 C 都是这样一个函数的值域。

证明. (1) f 是严格递增的，所以它的值域在 α 中无界；f 是连续的，所以它的值域是闭集。

(2) 令 τ 为无界闭集 C 的序型，$f : \tau \to C$ 是关于序数上 $<$ 关系的同构，则 f 显然是严格递增和连续的。由于 C 是无界的，而 α 是正则的，所以 $\tau \geq \mathrm{cf}(\alpha) = \alpha$。又由于对任意 $\eta < \tau$，$\eta \leq f(\eta)$，所以 $\tau \leq \sup f(\eta) = \alpha$。所以 $\tau = \alpha$。 □

6.2.6. 命题 假设 α 是极限序数，且 $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，则对任意 $\gamma < \mathrm{cf}(\alpha)$，如果 $\langle C_\xi \rangle_{\xi<\gamma}$ 是无界闭集的序列，则 $\bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi$ 也是 α 的无界闭集。

证明. 假设 $\gamma = 2$，只需证明 $C_1 \cap C_2$ 是无界闭集。闭集的交显然是闭集，所以只需证明 $C_1 \cap C_2$ 在 α 中无界。任取 $\delta < \kappa$，则存在 $\xi \in C_1, \eta \in C_2$（不妨设 $\xi < \eta$）使得 $\delta < \xi < \eta$，构造无穷序列：

$$\xi_0 < \eta_0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \cdots,$$

其中 $\xi_0 = \xi, \eta_0 = \eta$ 且对任意 $n \in \omega$，$\xi_n \in C_1, \eta_n \in C_2$。令 μ 是这个序列的极限，则 $\sup(C_1 \cap \mu) = \mu$ 且 $\sup(C_2 \cap \mu) = \mu$，因此 $\mu \in C_1 \cap C_2$，并且 $\delta < \mu$。

如果 γ 是后继序数，则凭借归纳假设，用 $\gamma = 2$ 的方法容易证明。

假设 γ 是极限序数，令 $D = \bigcap_{\xi<\gamma} C_\xi$，$D$ 显然是闭集，以下证明它是无界的。注意到，对任意 $\eta < \gamma$，如果 $D_\eta = \bigcap \{C_\xi \mid \xi < \eta\}$，则 D_η 是无界闭集且 $D = \bigcap_{\eta<\gamma} D_\eta$，并且 $\eta < \eta' < \gamma$ 蕴涵 $D_\eta \supset D_{\eta'}$。任取 $\mu < \alpha$，构造序数的序列：

$$\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_\eta < \cdots,$$

其中 $\xi_0 > \mu$ 且对每一 $\eta < \gamma$，$\xi_\eta \in D_\eta$ 使得 ξ_η 是大于 $\sup\{\xi_\alpha \mid \alpha < \eta\}$ 的最小序数。因为 α 是正则的，因此以上序列是合理的。取 $\xi = \sup\{\xi_\eta \mid \eta < \gamma\}$。显然对任意 $\eta < \gamma$，$\xi \in D_\eta$，所以 $\xi \in D$ 且 $\mu < \xi$。 □

由此，我们可以定义：

6.2.7. 定义 对任意共尾数大于 ω 的极限序数 α，

$$F_{CB}(\alpha) = \{X \subseteq \alpha \mid \exists C(\ C \text{ 是 } \alpha \text{ 的无界闭子集} \wedge C \subseteq X)\} \tag{6.8}$$

是一个滤，这个滤称为 α 上的**无界闭滤**。

6.2.8. 推论 如果 κ 是不可数正则基数，则 κ 上的无界闭滤是 κ-完全的。

证明. 由命题6.2.6立得。 □

虽然不可数正则基数 κ 上的无界闭滤是 κ 完全的，但是可以找到一个长度为 κ 的无界闭集的序列，它的交为空集（见习题 6.3.6）。

6.2.9. **定义** 对任意序数 α，$\langle X_\xi \mid \xi < \alpha\rangle$ 是 α 子集的序列，

（1） X_ξ 的**对角线交**定义为

$$\triangle_{\xi<\alpha} X_\xi = \left\{\eta < \alpha \mid \eta \in \bigcap_{\xi<\eta} X_\xi\right\}; \tag{6.9}$$

（2） X_ξ 的**对角线并**定义为

$$\nabla_{\xi<\alpha} X_\xi = \left\{\eta < \alpha \mid \eta \in \bigcup_{\xi<\eta} X_\xi\right\}。 \tag{6.10}$$

6.2.10. **注** 如果令 $Y_\xi = \{\eta \in X_\xi \mid \eta > \xi\}$，则 $\triangle_{\xi<\alpha} X_\xi = \triangle_{\xi<\alpha} Y_\xi$。同时，$\triangle_{\xi<\alpha} X_\xi = \bigcap_{\xi<\alpha}(X_\xi \cup \{\eta \mid \eta \leq \xi\})$（见习题 6.3.7、6.3.8）。另外，在不致引起混淆的情况下，我们常将 $\triangle_{\xi<\alpha} X_\xi$ 简记为 $\triangle X_\xi$。对于 $\nabla_{\xi<\alpha} X_\xi$，也类似。

6.2.11. **命题** 对任意不可数正则基数 κ，以及 κ 上的无界闭集的序列 $\langle X_\gamma \mid \gamma < \kappa\rangle$，$\triangle_{\gamma<\kappa} X_\gamma$ 是无界闭集。即，$F_{CB}(\kappa)$ 关于对角线交封闭。

证明. 令 C_γ 为 $\bigcap_{\xi<\gamma} X_\xi$，则 $\triangle X_\gamma = \triangle C_\gamma$。而我们有

$$C_0 \supset C_1 \supset \cdots \supset C_\gamma \supset \cdots, \quad (\gamma < \kappa)。$$

令 $C = \triangle C_\gamma$。为证 C 是闭集，取 η 是 C 的极限点。我们需要证明 $\eta \in C$，即，对任意 $\xi < \eta$，$\eta \in C_\xi$。为此定义 $X = \{\nu \in C \mid \xi < \nu < \eta\}$，则 $X \subset C_\xi$；根据定理6.2.8，C_ξ 是无界闭集，所以 $\eta = \sup X \in C_\xi$，因此 $\eta \in C$。

为证 C 无界，取 $\mu < \kappa$。如下定义序列 $\langle \beta_n \mid n < \omega\rangle$：令 $\beta_0 > \mu$ 且 $\beta_0 \in C_0$，对每一 n，令 $\beta_{n+1} > \beta_n$ 且 $\beta_{n+1} \in C_{\beta_n}$。由于 C_{β_n} 是无界的，所以这样的 β_{n+1} 总能找到。同时注意到

$$C_{\beta_0} \supset C_{\beta_1} \supset C_{\beta_2} \supset \ldots,$$

所以对任意 $m > n$，$\beta_m \in C_{\beta_n}$。以下证明 $\beta = \sup\{\beta_n \mid n < \omega\} \in C$。为此，只需证明对任意 $\xi < \beta$，都有 $\beta \in C_\xi$。而如果 $\xi < \beta$，则存在 n，$\xi < \beta_n$。而对每一 $m > n$，$\beta_m \in C_{\beta_n} \subset C_\xi$。由于 C_ξ 是闭集，故 $\beta \in C_\xi$。所以 $\beta \in C$，C 是无界的。 □

6.2.12. **推论** 对任意不可数正则基数 κ，如果 $f:\kappa\to\kappa$ 是函数，则集合

$$D=\{\alpha<\kappa\mid\forall\beta<\alpha(f(\beta)<\alpha)\}\tag{6.11}$$

是无界闭集。

证明. 对任意 $\alpha<\kappa$，定义 $C_\alpha=\{\beta<\kappa\mid f(\alpha)<\beta\}$，则 C_α 是无界闭集。显然，$D=\triangle C_\alpha$，所以是无界闭集。 □

若 α 是极限序数，并且 $\mathrm{cf}(\alpha)>\omega$，则 α 上的无界闭滤 $F_{CB}(\alpha)$ 包含了 α 的“大子集”，与其对偶的“小子集”的族是 $I=\{X\subseteq\kappa\mid\kappa-X\in F_{CB}\}$。有时候我们需要刻画“不小的”子集的族，即不属于 I 的那些子集，这等价于说 $\kappa-X$ 不以一个无界闭集为子集，即 X 与任何无界闭集相交不空。

6.2.13. **定义** 令 α 为任意极限序数，并且 $\mathrm{cf}(\alpha)>\omega$，

(1) 如果 $S\subseteq\alpha$ 满足对任意 α 的无界闭集 C 都有 $S\cap C\neq\emptyset$，就称 S 是 α 上的**平稳集**；[①]

(2) $I_{NS}(\alpha)=\{X\subseteq\alpha\mid\exists C(C$ 是 α 的无界闭子集 $\wedge X\cap C=\emptyset\}$ 称为 α 上的**非平稳理想**。

6.2.14. **引理** 假设 α 是极限序数，$\mathrm{cf}(\alpha)>\omega$，

(1) α 上的无界闭集都是平稳集，若 S 是平稳集且 $S\subseteq T\subseteq\alpha$，则 T 是平稳集；

(2) α 上的平稳集都是无界的；

(3) 存在 α 上无界子集 T，但 T 不是平稳集。

证明. (1) 由命题6.2.6，任意两个无界闭集相交不空。

(2) 假设 S 是平稳集，任取 $\beta<\alpha$，$\{\gamma<\alpha\mid\beta<\gamma\}$ 是 α 上的无界闭集，它与 S 相交非空，这个交集中的任何序数都大于 β。

(3) 令 $T=\{\alpha+1\mid\alpha<\kappa\}$ 是无界的，但不是 κ 上的平稳集，因为 κ 中的所有极限序数构成的无界闭集与它相交为空。

□

[①] Stationary Set 有很多不同的译法，例如“稳定集”、“驻集”，新出版的《数学大词典》中译为“荟萃集”。

6.2.15. 练习 假设 α 是极限序数，$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，

(1) 对任意 $\gamma < \alpha$，如果 $D = \{X_\xi \mid \xi < \gamma\}$ 为非平稳集的族，则 $\bigcup D$ 也是非平稳集。因此，如果 κ 是不可数正则基数，则 κ 上的非平稳理想是 κ-完全的；

(2) S 和 $\alpha - S$ 都是 α 上的平稳集当且仅当 S 不以任何无界闭集为子集。

6.2.16. 命题 *假设 α 是极限序数，$\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，而 $\lambda < \mathrm{cf}(\alpha)$ 是正则的，定义*

$$E^\alpha_\lambda = \{\beta < \alpha \mid \mathrm{cf}(\beta) = \lambda\}, \tag{6.12}$$

则 E^α_λ 是 α 上的平稳集。

证明. 任取 α 上的无界闭集 C，递归定义 C 上的长度为 λ 的严格递增的序列

$$\alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_\xi < \ldots < \ldots, \qquad (\xi < \lambda)。$$

λ 是正则的，$\lambda < \mathrm{cf}(\alpha)$，以及 C 在 α 中无界保证我们可以得到这样的序列。令此序列的上确界为 δ，则由于 C 是闭集，$\delta \in C$，又因为 $\mathrm{cf}(\delta) = \lambda$，所以 $\delta \in E^\alpha_\lambda$。 □

6.2.17. 注 当 $\alpha > \aleph_1$ 时，根据以上命题6.2.16，E^α_ω 和 $E^\alpha_{\omega_1}$ 是不相交的平稳子集，因此，E^α_ω 和 $\kappa - E^\alpha_\omega$ 都不是无界闭集，所以 α 上的无界闭滤不是超滤。如果 $\alpha = \aleph_1$，要证明 α 上的无界闭滤不是超滤就需要选择公理，而且这种对选择公理的依赖是必须的，因为命题"$\aleph_1$ 上的无界闭滤是超滤"与 **ZF** 是一致的。

6.2.18. 命题 *对任意不可数正则基数 κ，如果 $\langle X_\xi \mid \xi < \kappa\rangle$ 是非平稳集的序列，则 $\triangledown_{\xi<\kappa} X_\xi$ 仍是非平稳集。即，$I_{NS}(\kappa)$ 关于对角线并封闭。*

证明. 对任意 X_ξ，存在 C_ξ 使得 $X_\xi \cap C_\xi = \emptyset$，令 $C = \triangle C_\xi$，则 C 是无界闭集（命题6.2.11）。令 $X = \triangledown X_\xi$，显然 $X \cap C = \emptyset$。 □

在本节剩下的部分，我们证明索洛维（Robert Solovay）的一个重要结论。首先证明一个重要的定理——福道尔（Géza Fodor）定理，除了在索洛维定理中需要用到，它还有很多应用。

6.2.19. **定义** 定义在序数的集合 S 上的函数 f 如果满足对任意非 0 的 $\alpha \in S$，都有 $f(\alpha) < \alpha$，就称 f 是**退缩的**。

6.2.20. **定理 (福道尔)** 任取不可数正则基数 κ，平稳集 $S \subseteq \kappa$，如果 f 是定义在 S 上的退缩函数，则存在平稳集 $T \subseteq S$ 和序数 $\gamma < \kappa$ 使得对任意 $\alpha \in T$，$f(\alpha) = \gamma$。

证明. 反设对任意 $\gamma < \kappa$，集合 $A_\gamma = \{\alpha \in S \mid f(\alpha) = \gamma\}$ 都不是平稳集。对每一 $\gamma < \kappa$，存在无界闭集 C_γ，$A_\gamma \cap C_\gamma = \emptyset$，即对任意 $\alpha \in S \cap C_\gamma$，$f(\alpha) \neq \gamma$。令 $C = \triangle_{\gamma<\kappa} C_\gamma$，即 $\alpha \in C$ 当且仅当对任意 $\gamma < \alpha$，$\alpha \in C_\gamma$，也就是说，对任意 $\gamma < \alpha$，$f(\alpha) \neq \gamma$，这意味着对任意 $\alpha \in C$，$f(\alpha) \geq \alpha$。集合 C 是无界闭集，所以 $S \cap C \neq \emptyset$，但所有属于 S 的 α 都有 $f(\alpha) < \alpha$。矛盾。 □

6.2.21. **引理** 令 S 是不可数正则基数 κ 上的平稳集。定义 $T \subseteq S$ 为

$$\begin{aligned} T = \{\alpha \in S \mid \operatorname{cf}(\alpha) = \omega \vee (\operatorname{cf}(\alpha) > \omega \wedge \\ S \cap \alpha \text{ 不是 } \alpha \text{ 上的平稳集})\}, \end{aligned} \tag{6.13}$$

则 T 是 κ 上的平稳集。

证明. 任取 κ 上的无界闭集 C，我们证明 $C \cap T$ 不空。注意到，C 的所有极限点的集合 $C' = \{\xi < \kappa \mid \xi \neq 0 \wedge \sup(C \cap \xi) = \xi\}$ 也是无界闭集（引理6.2.4）。取 $\mu = \min(C' \cap S)$，如果 $\operatorname{cf}(\mu) = \omega$，则 $\mu \in T$。如果 $\operatorname{cf}(\mu)$ 不可数，注意 μ 是 C 的极限点，还是根据引理6.2.4，$C' \cap \mu$ 是 μ 上的无界闭集，由于 μ 是 $C' \cap S$ 的最小元，所以 $(C' \cap \mu) \cap (S \cap \mu) = \emptyset$，即 $(S \cap \mu)$ 不是 μ 上的平稳集，$\mu \in T$。 □

6.2.22. **引理** 令 κ 是不可数正则基数，$K = \{\gamma < \kappa \mid \gamma \text{ 是极限序数}\}$，$S \subseteq K$ 是 κ 上的平稳集。如果对任意 $\alpha \in S$，f_α 是 α 中递增的共尾序列，并且是连续的，则以下二者必有一真：

(1) 存在 $\eta < \kappa$，对任意 $\xi < \kappa$，

$$S_\xi = \{\alpha \in S \mid \eta \in \operatorname{dom}(f_\alpha) \wedge f_\alpha(\eta) \geq \xi\} \tag{6.14}$$

是 κ 上的平稳集；

(2) *存在 κ 上的无界闭集 C，对任意 $\gamma,\alpha \in C \cap S$，$\gamma < \alpha$ 蕴涵 $\gamma = f_\alpha(\gamma)$。*

证明. 假设（1）不成立，即对任意 $\eta < \kappa$，存在 $\xi_\eta < \kappa$ 和无界闭集 C_η 使得 $C_\eta \cap S_{\xi_\eta} = \emptyset$。这实际定义了一个函数 $g : \kappa \to \kappa$ 使得 $g(\eta) = \xi_\eta$。令

$$C = \left\{\xi \in \triangle_{\eta<\kappa} C_\eta \mid g[\xi] \subseteq \xi \wedge \xi \text{ 是极限的}\right\}, \tag{6.15}$$

容易看出，如果令 $D = \{\xi < \kappa \mid g[\xi] \subseteq \xi\}$，则 $C = \triangle_{\eta<\kappa} C_\eta \cap D \cap K$。由习题6.3.16，$D$ 是无界闭集，所以显然 C 是无界闭集。

考虑 $\alpha,\gamma \in C \cap S$，并且 $\gamma < \alpha$。由于 $\alpha \in \triangle_{\eta<\kappa} C_\eta$，因此对任意 $\eta < \alpha$，$\alpha \in C_\eta$，故 $\alpha \notin S_{\xi_\eta}$（因为 $C_\eta \cap S_{\xi_\eta} = \emptyset$）。根据 S_{ξ_η} 的定义，对任意 $\eta \in \gamma \cap \mathrm{dom}(f_\alpha)$，$f_\alpha(\eta) < \xi_\eta$。而且，由于 $\gamma \in D$，因此 $g[\gamma] \subseteq \gamma$，故 $\xi_\eta < \gamma$。如果 $\mathrm{dom}(f_\alpha) \subseteq \gamma$，那 $\mathrm{ran}(f_\alpha) \subseteq \gamma$ 就在 α 中有界，与假设矛盾，所以一定是 $\gamma \in \mathrm{dom}(f_\alpha)$。

由于 γ 是极限的而 f_α 是连续的，因此 $f_\alpha(\gamma) = \sup\{f_\alpha(\xi) \mid \xi < \gamma\} \leq \gamma$，而 f_α 是递增的蕴涵 $f_\alpha(\gamma) \geq \gamma$。综上，$f_\alpha(\gamma) = \gamma$，(2) 成立。 □

6.2.23. **定理 (索洛维)** *对任意不可数的正则基数 κ，κ 上的任一平稳集都是 κ 个互不相交的平稳集的并。*

证明. 假设 S 是 κ 上的平稳集。定义 $T \subseteq S$ 为

$$T = \left\{\alpha \in S \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \omega \vee (\mathrm{cf}(\alpha) > \omega \wedge S \cap \alpha \text{不是} \alpha \text{上平稳集})\right\}。 \tag{6.16}$$

根据引理6.2.21，T 是平稳集。不难看出，我们只需证明 T 可以划分为 κ 个不相交的平稳集。

任取 $\alpha \in T$。如果 $\mathrm{cf}(\alpha) > \omega$，则由定义，$S \cap \alpha$ 不是 α 上的平稳集。因此，根据引理 6.2.5 (2)，存在一个连续递增的共尾序列 f_α，其值域 C_α 是 α 中的无界闭集，并且与 $S \cap \alpha$ 相交为空，所以 $C_\alpha \cap T = \emptyset$。如果 $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$，令 $g_\alpha : \omega \to \alpha$ 为严格递增的共尾序列，并且定义 $f_\alpha(n) = g_\alpha(n) + 1$，则 f_α 的值域 C_α 与 T 相交为空。这样，我们证明了对任意 $\alpha \in T$，存在 α 中的连续递增的无界序列 f_α，其值域与 T 相交为空。

令 C 是与 T 相交不空的无界闭集，则 $C \cap T$ 是平稳集，如果存在 $\alpha,\gamma \in C \cap T$，使得 $\gamma < \alpha$ 并且 $f_\alpha(\gamma) = \gamma$，则 $\mathrm{ran} f_\alpha \cap T \neq \emptyset$，矛盾，因此引理6.2.22中的（2）不成立。所以存在 $\eta < \kappa$，使得对任意 $\xi < \kappa$，引

理6.2.22（1）中定义的 S_ξ 是平稳集。对任意 $\alpha \in T$，我们定义

$$f(\alpha) = \begin{cases} f_\alpha(\eta), & \text{若 } \eta \in \mathrm{dom}(f_\alpha); \\ 0, & \text{否则。} \end{cases} \tag{6.17}$$

对任意非零的 $\xi \in \kappa$，集合 $T_\xi = \{\alpha \in T \mid f(\alpha) \geq \xi\} = \{\alpha \in T \mid \eta \in \mathrm{dom}(f_\alpha) \wedge f_\alpha(\eta) \geq \xi\}$，所以是平稳集。

这样，我们定义了一个函数 $f : T \to \kappa$，并注意到它是退缩的。对任意 $\xi \in \kappa$，由于 $T_\xi \subseteq T$ 是平稳集，所以根据福道尔定理，存在一个 $\gamma_\xi < \kappa$，使得 $f^{-1}[\{\gamma_\xi\}] \cap T_\xi$ 是平稳集。因为对任意 $\alpha \in T_\xi$，$f(\alpha) \geq \xi$，所以 $\gamma_\xi > \xi$，即 $\{\gamma_\xi \mid \xi < \kappa\}$ 在 κ 中无界又由于对任意 $\gamma_1, \gamma_2 < \kappa$，$f^{-1}[\{\gamma_1\}] \cap f^{-1}[\{\gamma_2\}] = \emptyset$，所以 $\{f^{-1}[\{\gamma_\xi\}] \cap T_\xi \mid \xi < \kappa\}$ 是 κ 个互不相交的平稳集的族。 □

6.3 习题

6.3.1. 如果 $\mathcal{F}$ 是 S 上的滤构成的一个 $\subseteq$-链，则 $\bigcup \mathcal{F}$ 是 S 上的滤。

6.3.2. 如果 F 是非主超滤，则任意 $X \in F$ 都是无穷的。因此任何非主超滤必是弗雷歇滤的扩张。

6.3.3. 如果 F 是 S 上的滤，而 $F' = \{X \subseteq S \mid S - X \notin F\}$，则 $F \subseteq F'$，并且 $F = F'$ 当且仅当 F 是超滤。

6.3.4. 假设 $X \subseteq S$，证明：

(1) 如果 F 是 S 上的滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的滤；

(2) 如果 F 是 S 上的超滤且 $X \in F$，则 $F \cap \mathcal{P}(X)$ 是 X 上的超滤；

(3) 如果 F 是 X 上的滤，则 F 能扩张为 S 上的超滤。

6.3.5. 假设 S 是无穷的，则

(1) 存在 S 上的超滤 F，对任意 $X \in F$，$|X| = |S|$。这样的滤称为 S 上的**均匀超滤**（uniform ultrafilter）；

(2) $\{F \mid F \text{ 是 } S \text{ 上的均匀超滤}\} = \{F \mid F \text{ 是 } S \text{ 上的非主超滤}\}$ 当且仅当 S 是可数的。

6.3.6. 令 κ 为不可数正则基数，举出一个例子，使得 $X=\{C_\alpha \mid \alpha<\kappa\}$ 是 κ 上的无界闭集的族，而 $\bigcap X=\emptyset$，但是 $\triangle_{\alpha<\kappa}C_\alpha=\kappa$。

6.3.7. 如果令 $Y_\alpha=\{\xi\in X_\alpha \mid \xi>\alpha\}$，则 $\triangle_{\alpha<\kappa}X_\alpha=\triangle_{\alpha<\kappa}Y_\alpha$。

6.3.8. $\triangle_{\alpha<\kappa}X_\alpha=\bigcap_{\alpha<\kappa}(X_\alpha\cup\{\xi \mid \xi\leq\alpha\})$。

6.3.9. 证明不存在 ω 上非主超滤 F 使得 F 对对角线交封闭。

6.3.10. 如果 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤，则以下命题等价：

(1)　F 是非主滤；

(2)　$\{X\subseteq S \mid S-X \text{ 是有穷的}\}\subseteq F$；

(3)　F 的元素都是无穷的。

6.3.11. 如果 S 是无穷的，则 S 上的任何非主超滤都不是 $|S|^+$- 完全的。所以 ω 上的任何非主超滤都不是 σ-完全的。

6.3.12. 如果 F 是 S 上的非主超滤，并且是 $|S|$-完全的，则 F 是均匀超滤。

6.3.13. 一个不可数基数 κ 是**可测的**当且仅当 κ 上存在 κ 完全的非主超滤。证明任何可测基数都是不可达基数，即，都是正则和强极限的。

6.3.14. 如果 F 是 S 上的滤，并且令 $\mu=\sup\{\kappa \mid F \text{ 是 } \kappa \text{ 完全的}\}$，则 μ 是正则基数，并且 F 是 μ-完全的。

6.3.15. 假设 S 是无穷的，F 是 S 上的超滤。证明 F 是 κ-完全的当且仅当对任意 $\tau<\kappa$ 和任意划分 $\langle X_\xi \mid \xi<\tau\rangle$，总存在 $X_\xi\in F$。

6.3.16. 如果 $\alpha>\aleph_0$ 是正则基数，并且 $f:\alpha\to\alpha$ 是函数，则集合 $C=\{\beta<\alpha \mid f[\beta]\subseteq\beta\}$ 是 α 上的无界闭集。

6.3.17. 假设 α 为极限序数，则：

(1) α 上存在一个序型为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界闭集。

(2) 如果 A 是一集极限序数，则用选择公理可以证明：存在序列 $\langle C_\alpha\rangle_{\alpha\in A}$ 满足：C_α 是 α 上的序型为 $\mathrm{cf}(\alpha)$ 的无界闭集。

6.3.18. $\{\alpha<\omega_1 \mid \omega^\alpha=\alpha\}$ 是 ω_1 上的无界闭集。

6.3.19. κ 上的无界闭集都是平稳集。

6.3.20. 令 κ 为不可数正则基数，$S\subseteq\kappa$，证明以下命题等价：

(1) S 是平稳集；

(2) 对任意递减函数 $f: S\to\kappa$，存在序数 $\alpha<\kappa$，使得 $f^{-1}[\alpha]$ 在 κ 中无界。

6.3.21. 如果 κ 是不可达基数（它当然是不可数正则的），则集合 $\{\lambda<\kappa \mid \lambda \text{ 是强极限基数}\}$ 是 κ 上的无界闭集。

6.3.22. 如果 κ 是最小的不可达基数，则集合

$$\{\lambda<\kappa \mid \lambda \text{ 是强极限的奇异基数}\}$$

是 κ 上的无界闭集。

6.3.23. 假设 κ 是第 α 个不可达基数，而 $\alpha<\kappa$，证明 $X=\{\lambda<\kappa \mid \lambda \text{ 是正则的}\}$ 不是 κ 上的平稳集。

6.3.24. 一个无穷基数 κ 是**马洛基数** (Mahlo cardinal) 当且仅当 κ 是不可达的并且 $\{\lambda<\kappa \mid \lambda \text{ 是正则基数}\}$ 是 κ 上的平稳集。如果 κ 是马洛基数，则 $\{\lambda<\kappa \mid \lambda \text{ 是不可达基数}\}$ 是 κ 上的平稳集，因此 κ 是第 κ 个不可达基数。

6.3.25. 如果 $\kappa=\min\{\lambda \mid \lambda \text{ 是第 } \lambda \text{ 个不可达基数}\}$，证明 κ 不是马洛基数。

6.3.26. 如果 κ 是马洛基数，则集合 $\{\lambda<\kappa \mid \lambda \text{ 是第 } \lambda \text{ 个不可达基数}\}$ 在 κ 中无界。

第七章 集合的宇宙

> 实无穷源于 3 种情形：首先，当它在绝对独立的超自然世界中，在神性中[1]，以最完满的形式实现时，此时我称之为**绝对无穷**或直接称为**绝对**；其二，当它出现于变动不拘的造化世界中；其三，当它在观念中被心灵把握为一个数学量，一个数，或序型。
>
> 格奥尔格·康托

连续统问题一直困扰着康托，他认为自己可以证明连续统假设 **CH**，但始终没有成功。而以下的结果可能会出乎康托的预料：**CH** 和 **CH** 的否定都不是 **ZFC** 的定理，这就是哥德尔和科恩的工作，通常把它们总结为

连续统假设 CH 是独立于 ZFC 的。

7.1 又一点数理逻辑

要在 **ZFC** 中证明“**ZFC** 不能证明 **CH**”，这就需要在 **ZFC** 内谈论(作为数学对象的)“证明”这一概念，而这又涉及公式、语句、理论、一致性等等，这些都是“元理论”中的概念。前面（1.2节）中我们提到，元理论不能完全形式化到对象理论中，它的边界是模糊的，但好在上述概念都是严格有穷的，可以看作数学对象，从而可以“形式化”到对象理论中。还是在1.2节中，我们已经看到发展这些概念只需要初等数论的一些片段，而

[1] 英文为“in Deo”，这里译为“神性”。又据维基百科，Deo 是指希腊女神德墨忒耳（Demeter），是传说中的大地与丰收女神。此处意思令人想起《老子》中的“谷神”：“谷神不死，是谓玄牝；玄牝之门，是谓天地根。”

第三章中我们证明在 **ZFC** 内可以发展包括数论在内的几乎全部经典数学理论，所以以上概念在 **ZFC** 内表达是没有问题的。接下来我们更详细说明这一点。

首先，自然数这一概念是元理论和对象理论所共有的。为了区分它们，我们采用类似引号的记法：

$$\ulcorner 0\urcorner, \ulcorner 1\urcorner, \cdots, \ulcorner n\urcorner, \cdots$$

表示形式理论中的自然数。

我们已经知道公式、语句都可看作自然数，所以，如果 φ 是公式，则 $\ulcorner\varphi\urcorner$ 表示对象理论中对应的那个自然数。由于从 **ZFC** 出发的一个证明是公式的一个有穷序列：$\langle\varphi_1, \cdots, \varphi_n\rangle$，而且是递归的，所以"证明"也可看作是一个自然数，假设 D 是这样的证明，则 $\ulcorner D\urcorner$ 是形式理论中对应的那个自然数。

我们一直强调这些将被形式化的概念是递归的，是因为递归的概念能在数论的一个片段中，因而也能在包含这样片段的任何理论中"表示"出来。

7.1.1. 定理 *如果 R 是自然数上的一个递归的 n 元关系，T 是包含数论片段的适当丰富的理论，则存在公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，对任意自然数 $m_1, \cdots, m_n$，*

$$\text{如果 } (m_1, \cdots, m_n) \in R, \text{则 } T \vdash \varphi(\ulcorner m_1\urcorner, \cdots, \ulcorner m_n\urcorner);$$
$$\text{如果 } (m_1, \cdots, m_n) \notin R, \text{则 } T \vdash \neg\varphi(\ulcorner m_1\urcorner, \cdots, \ulcorner m_n\urcorner)。$$

此时我们称"φ 在 T 中表示关系 R"，或"R 在 T 中是可表示的"，有时也会称 R 在 T 中"可定义"。[1]

7.1.2. 注 我们今后讨论的理论都是"适当丰富的"，即有关元理论的句法概念都可在此理论中表示出来。例如，"φ 是一个公式"在 **ZFC** 中是可表示的，即存在一个公式 $\psi(x)$，$\psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$ 表示 φ 是一个公式。或严格地说：因为自然数集合 $\mathbb{N}$ 的一个子集 $\text{FORM} = \{\ulcorner\varphi\urcorner \mid \varphi \text{ 是一个公式}\}$ 是递归的，所以存在公式 $\psi(x)$，使得如果 $\ulcorner\varphi\urcorner \in \text{FORM}$，则 $\textbf{ZFC} \vdash \psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$，如果 $\ulcorner\varphi\urcorner \notin \text{FORM}$，则 $\textbf{ZFC} \vdash \neg\psi(\ulcorner\varphi\urcorner)$。同样地，集合

$$\text{PROOF} = \{\ulcorner D\urcorner \mid D \text{ 是 } \textbf{ZFC} \text{ 中的一个证明}\} \tag{7.1}$$

[1] 注意与在模型中可定义相区分。

也是递归的，因此是可表示的。

回忆下“理论 T 是一致的”这个定义，即：不存在一个有穷的公式序列 $D = \langle\varphi_1, \cdots, \varphi_n\rangle$ 使得 D 是一个 T 中的证明并且这一证明的最后一个公式 φ_n 形如 $\psi \wedge \neg\psi$。这样，如果理论 T 是可公理化的（它的公理集是递归的），我们就可以有一个形式语言中的公式表达“T 是一致的”这一命题，今后我们记为 $\mathrm{Con}(T)$。

所谓哥德尔第二不完全性定理就是说：

7.1.3. 定理 如果 T 是包含 **ZFC** 公理的一个递归公理集，并且是一致的，则

$$T \nvdash \mathrm{Con}(T)。 \tag{7.2}$$

特别地，$\mathbf{ZFC} \nvdash \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC})$。

另一个需要提到的数理逻辑概念是“模型 M 满足公式 φ”。

集合论语言的一个**结构**(M, E) 指的是一个集合 M 及其上的一个二元关系 E，本书中 E 通常就是集合的属于关系 $\in$。多数情况下我们用 M 表示 (M, E)，而不指明关系 E。对任意集合论语言的公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，$M$ 满足 φ 是说：存在 M 中的元素 $a_1, \cdots, a_n$，如果把自由变元 $x_1, \cdots, x_n$ 指派为 $a_1, \cdots, a_n$，把 φ 中的符号“$\in$”解释为 E，则 φ 成立。显然，这一概念可以通过对公式归纳而递归地定义。通常我们以“$M \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$”表示满足关系。特别地，如果 σ 是不含自由变元的语句，则直接记作 $\boldsymbol{M \models \sigma}$，此时称$M$ **是** σ **的模型**或σ **在** M **中为真**。如果理论 T 的所有语句都在 M 中为真，则称“M 是 T 的模型”，记作 $M \models T$。

数理逻辑中的哥德尔完全性定理就是说：

7.1.4. 定理 对任意可公理化的理论 T，

$$\mathrm{Con}(T) \quad \text{当且仅当} \quad \text{存在模型 } M,\ (M \models T)。 \tag{7.3}$$

结合不完全性定理，我们不能在 **ZFC** 内证明 **ZFC** 存在一个模型，这对我们是一个巨大的限制。

7.1.5. 定义 假设 (M, E_M) 和 (N, E_N) 是集合论的模型，

(1) 如果对任意语句 σ，$M \models \sigma$ 当且仅当 $N \models \sigma$，则称 M 与 N **初等等价**，记作 $M \equiv N$；

(2) 如果存在 M 到 N 的双射 $f: M \to N$ 满足：对任意的 $a, b \in M$，$aE_M b$ 当且仅当 $f(a)E_N f(b)$，就称 f 是 M 到 N 的**同构**，记作 $f: M \cong N$，有时不须特别注明 f，则记作 $M \cong N$；

(3) 如果 $M \subseteq N$ 并且 $E_M = E_N \upharpoonright M$，就称 M 是 N 的**子模型**，记作 $M \subseteq N$；

(4) 如果单射 $f: M \to N$ 使得 M 同构于 N 的一个子模型，并且满足：对任意公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，对任意 $a_1, \cdots, a_n \in M$，$M \vDash \varphi[a_1, \cdots, a_n]$ 当且仅当 $N \vDash \varphi[f(a_1), \cdots, f(a_n)]$，就称 f 是 M 到 N 的**初等嵌入**，记作 $f: M \prec N$，更多时候简单记作 $M \prec N$；

(5) 如果 M 本身是 N 的子模型且 M 上的等同函数 id_M 是 M 到 N 的初等嵌入，则称 M 是 N 的**初等子模型**，这在同构的意义上与初等嵌入是一个意思，所以也记作 $M \prec N$。

7.1.6. **练习** 假设 (M, E_M) 和 (N, E_N) 是集合论的模型，

(1) 如果 $f: M \cong N$，则 $f: M \prec N$;

(2) 如果 $M \prec N$，则 $M \equiv N$;

(3) $M \prec N$ 并且 $N \prec L$，则 $M \prec L$;

(4) 如果 $M \prec L$ 并且 $N \prec L$ 并且 $M \subseteq N$，则 $M \prec N$。

以下引理告诉我们如何构造模型 N 的初等子模型。

7.1.7. **引理** 假设 N 是集合论模型，$M \subseteq N$ 是 N 的子集，则 $M \prec N$ 当且仅当对任意公式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$，任意 $(a_1, \cdots, a_n) \in M$，如果存在 $a \in N$ 使得 $N \vDash \varphi[a, a_1, \cdots, a_n]$，则存在 $a \in M$ 使得 $M \vDash \varphi[a, a_1, \cdots, a_n]$。

证明. 充分条件的方向容易证明：假设对任意 $(a_1, \cdots, a_n) \in M$，存在 $a \in N$ 使得 $N \vDash \varphi[a, a_1, \cdots, a_n]$，则有 $N \vDash \exists x \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，由于 $M \prec N$，所以 $M \vDash \exists x \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，即，存在 $a \in M$，$M \vDash \varphi[a, a_1, \cdots, a_n]$。

必要条件的方向则可以对公式归纳得到。不含量词的情况是显然的。对于形如 $\exists x \varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ 的公式，假设对任意 $a_1, \cdots, a_n \in M$，$M \vDash \exists x \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，即存在 $a \in M$，$M \vDash \varphi[a, a_1, \cdots, a_n]$，因为 $M \subseteq N$，所以 $a \in N$，由归纳假设，$N \vDash \varphi[a, a_1, \cdots, a_n]$；反之，

如果对任意 $a_1, \cdots, a_n \in M$，$N \vDash \exists x\varphi[a_1, \cdots, a_n]$，则存在 $a \in N$，$N \vDash \varphi[a, a_1, \cdots, a_n]$，根据题设，这蕴涵存在 $a \in M$，$M \vDash \varphi[a, a_1, \cdots, a_n]$，即 $M \vDash \exists x\varphi[a_1, \cdots, a_n]$。 □

7.1.8. **定义** 假设 (M, E) 是集合论模型，

(1) 对任意公式 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$，称 M 上的 n-元函数 h_φ 为 φ 的**司寇伦函数**如果：对任意 $a_1, \cdots, a_n \in M$，若存在 $a \in M$ 使得 $M \vDash \varphi[a, a_1, \cdots, a_n]$，则 $M \vDash \varphi[h_\varphi(a_1, \cdots, a_n), a_1, \cdots, a_n]$。注意，这一定义需要选择公理。

(2) 令 $\mathcal{H} = \{h_\varphi \mid \varphi \text{ 是集合论语言的公式}\}$ 为司寇伦函数的集合，S 是 M 的任意子集，则 $\mathcal{H}(S)$ 表示包含 S 的并且对 $\mathcal{H}$ 封闭的最小集合，称为 S 的**司寇伦壳**。

不难证明，某一子集的司寇伦壳是所在模型的初等子模型。

7.1.9. **引理** 令 N 是集合论模型，S 是 N 的子集，如果 $M = \mathcal{H}(S)$ 是 S 的司寇伦壳，则 $M \prec N$。

证明. 任取形如 $\varphi(x, x_1, \cdots, x_n)$ 的公式，假设对任意 $a_1, \cdots, a_n \in M$，存在 $a \in N$，$N \vDash \varphi[a, a_1, \cdots, a_n]$。取 φ 的司寇伦函数 h_φ，则 $N \vDash \varphi[h_\varphi(a_1, \cdots, a_n), a_1, \cdots, a_n]$。由于 M 是对 h_φ 封闭的，所以 $a = h_\varphi(a_1, \cdots, a_n) \in M$，即存在 $a \in M$，$M \vDash \varphi[a, a_1, \cdots, a_n]$。根据引理 7.1.7，$M \prec N$。 □

7.1.10. **洛文海姆 -司寇伦定理** 假设 N 是集合论模型并且是无穷的，则存在一个模型 M 满足：$|M| = \omega$ 并且 $M \prec N$。

证明. 任取至多可数的集合 $S \subseteq N$，令 $M = \mathcal{H}(S)$ 为 S 的司寇伦壳。由引理 7.1.9，$M \prec N$。考察 M 的基数，$|M| = |S| \cdot |\mathcal{L}| \cdot \omega$，其中 $|\mathcal{L}|$ 是集合论语言的基数，也就是集合论语言的公式数量，它是可数的，所以 $|M| = \omega$。 □

最后提醒读者注意：以上对模型的定义中，我们要求论域 M 是集合。事实上我们也可以讨论论域 $\mathbf{M}$ 是真类的情况。

7.2 层垒的谱系

在本节，我们工作于“$\mathbf{ZF}^-$”中，即 **ZF** 减去**基础公理**。这意味着本节的定理都是 $\mathbf{ZF}^-$ 的定理，本节的定义都可在 $\mathbf{ZF}^-$ 中表示。

7.2.1. 注 从本节开始，我们会特别注意明确“工作于”哪个理论中，这是相对一致性证明的需要。例如，我们要证明基础公理是相对于其他公理一致的，那就不能再工作于以基础公理为公理的理论中。有时为了强调某个定理或定义所依据的理论，例如 $\mathbf{ZF}^-$，我们会在这个定理或定义后面用 ($\mathbf{ZF}^-$) 表示出来。类似地，$\mathbf{ZF}^- - \mathrm{Pow}$ 则表示工作于 $\mathbf{ZF}^-$ 中而没有用到幂集公理。我们有时强调某个定理或定义没有使用某个公理还有另一个原因：在一个弱的系统中可做的东西在所有更强的系统中皆可做。

7.2.2. 定义 *对任意 α，我们递归定义序列 V_α 如下：*

(1) $V_0 = \emptyset$；

(2) $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$；

(3) *对任意极限序数 λ，$V_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} V_\beta$。*

同时我们还定义

$$\mathbf{WF} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} V_\alpha。\tag{7.4}$$

这样定义的 **WF** 是一个真类，它是否就是集合宇宙 **V** 本身呢？它的很多性质似乎在暗示确实如此。

7.2.3. 引理 *对任意序数 α，*

(1) *V_α 是传递的；*

(2) *如果 $\xi \le \alpha$，则 $V_\xi \subseteq V_\alpha$；*

(3) *如果 κ 是不可达基数，则 $|V_\kappa| = \kappa$。*

证明. 为证明 (1) 和 (2)，对 α 应用超穷归纳。假设所有的 $\beta < \alpha$ 都成立，我们证明 α 也成立。共有 3 种可能的情况：

- $\alpha = 0$ 时，(1) 和 (2) 都平凡成立；

- α 是极限序数。(2) 由定义显然成立；而由于传递集的并仍然是传递集，所以 (1) 也成立；

- $\alpha = \beta + 1$。由于 V_β 是传递的，因此 $\mathcal{P}(V_\beta)$ 也是传递的，并且 $V_\beta \subset \mathcal{P}(V_\beta)$。所以 (1) 和 (2) 都成立。

对于 (3)，首先注意到 $\kappa \leq V_\kappa$。由于 κ 是不可达的，利用归纳可以证明：对任意 $\alpha < \kappa$，$|V_\alpha| < |\kappa|$，所以 $|V_\kappa| = |\bigcup_{\alpha<\kappa} V_\alpha| \leq \kappa$。 □

如果 $x \in \mathbf{WF}$，那么存在 α，$x \in V_\alpha$，这样的 α 中最小的一个一定是后继序数，所以我们有如下定义：

7.2.4. 定义 对任意集合 $x \in \mathbf{WF}$，x 的**秩** $\text{rank}(x)$ 定义为使得 x 属于 $V_{\beta+1}$ 的最小的 β，即

$$\text{rank}(x) = \min\{\beta \mid x \in V_{\beta+1}\}。$$

显然，如果 $\text{rank}(x) = \alpha$，则 $x \subseteq V_\alpha$，$x \notin V_\alpha$，并且对任意 $\gamma > \alpha$，$x \in V_\gamma$，见习题7.10.2。

7.2.5. 引理 以下命题成立：

(1) $V_\alpha = \{x \in \mathbf{WF} \mid \text{rank}(x) < \alpha\}$；

(2) $\mathbf{WF}$ 是传递的，即，对任意 $y \in \mathbf{WF}$，如果 $x \in y$，则 $x \in \mathbf{WF}$；

(3) 对任意 $x, y \in \mathbf{WF}$，如果 $x \in y$，则 $\text{rank}(x) < \text{rank}(y)$；

(4) 对任意 $y \in \mathbf{WF}$，$\text{rank}(y) = \sup\{\text{rank}(x) + 1 \mid x \in y\}$。

证明. 习题7.10.3。 □

以上引理表明，$\mathbf{WF}$ 中的集合按照秩分层，每一集合的元素都出现在这个集合下面的层次中，而下层的集合都包含在上面的层次中，类似于一个漏斗形。我们把这样的结构称为"层垒的谱系"（cumulative hierarchy），见图7.1。更为重要的是，在 $\mathbf{WF}$ 中，不存在 x，使得 $x \in x$，因为那样的话就会有 $\text{rank}(x) < \text{rank}(x)$，同样也不会有属于关系的无穷下降链。这实际上是说基础公理在 $\mathbf{WF}$ 中是成立的。注意，我们构造 $\mathbf{WF}$ 并未用到基础公理。接下来的引理表明，所有的序数都在 $\mathbf{WF}$ 中，并且它的秩就是其本身。

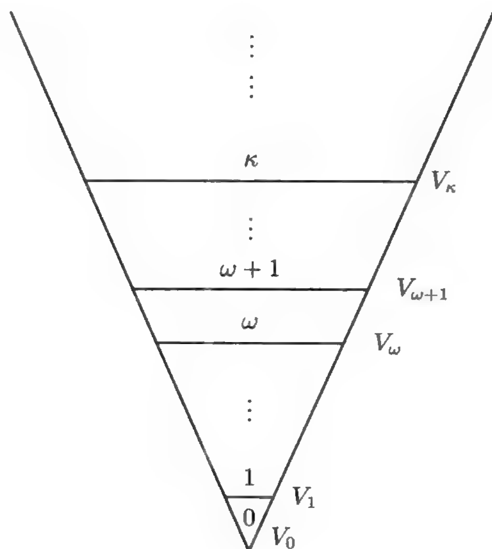


图 7.1: **WF**

7.2.6. 引理 假设 α 为任意序数，

(1) $\alpha \in \mathbf{WF}$ 并且 $\mathrm{rank}(\alpha) = \alpha$；

(2) $V_\alpha \cap \mathbf{On} = \alpha$。

证明. 对于 (1)，可用归纳法；(2) 可由 (1) 简单推出。 □

WF 不仅包含所有的序数，而且对所有集合论的运算封闭。实际上，象整数、有理数、实数这些数学对象也都属于 **WF**。以下引理就说明这一点。

7.2.7. 引理 以下命题成立：

(1) 假设 $x \in \mathbf{WF}$，则 $\bigcup x$，$\mathcal{P}(x)$ 以及 $\{x\}$ 属于 **WF**，并且它们的秩都小于 $\mathrm{rank}(x) + \omega$；

(2) 如果 $x, y \in \mathbf{WF}$，则 $x \times y$，$x \cup y$，$x \cap y$，$\{x, y\}$，(x, y)，x^y 都属于 $\mathbf{WF}$，并且它们的秩都小于 $\mathrm{rank}(x) + \mathrm{rank}(y) + \omega$；

(3) 整数 $\mathbb{Z}$，有理数 $\mathbb{Q}$ 和实数 $\mathbb{R}$ 都属于 $V_{\omega+\omega}$；

(4) 对任意集合 x，$x \in \mathbf{WF}$ 当且仅当 $x \subset \mathbf{WF}$。

证明. 证明十分直接，我们留给读者作为习题7.10.4。 □

既然整数、有理数、实数都属于 $\mathbf{WF}$，这就暗示我们 $\mathbf{WF}$ 足够丰富，所有数学都可在其中进行。而下面的引理则部分证实了这一点：

7.2.8. **引理** 假设选择公理成立，则

(1) 对任意群 G，存在 $\mathbf{WF}$ 中的群 G' 与 G 同构；

(2) 对任意拓扑空间 T，存在 $\mathbf{WF}$ 中的拓扑空间 T' 与 T 同胚。

证明. 假设 G 为群，则存在 α，$|G| = \alpha$。如果 $f : \alpha \to G$ 是双射，我们定义 α 上的二元运算 $\cdot$ 为：$x \cdot y = z$ 当且仅当 $f(x) \cdot_G f(y) = f(z)$。单位元 e 为满足 $f(x) = e_G$ 的唯一的 x。这实际上定义了与 G 同构并且属于 $\mathbf{WF}$ 的一个群。拓扑空间 T 的情况类似，见习题7.10.5。 □

7.2.9. **定义** 任意集合 A 上的二元关系 $<$ 是**良基的**，当且仅当对 A 的任意非空子集 X，X 有 $<$ 下的极小元。

显然，良基关系是良序关系的推广，如果一个二元关系是线序，则它是良基的当且仅当它是良序的。

7.2.10. **定理** 如果 $A \in \mathbf{WF}$，则 $\in$ 是 A 上的良基关系。

证明. 假设 X 是 A 的非空子集。取 $\alpha = \min\{\mathrm{rank}(y) \mid y \in X\}$，则 X 中任意秩为 α 的元素，都是 $\in$ 关系的极小元。 □

不过，我们不能证明以上命题的逆命题成立。因为不能排除存在这样的集合：$x = \{y\}$，而 $y = \{x\}$，并且 $x \neq y$。显然 $y \notin \mathbf{WF}$，但 $\in$ 在 y 上是良基的，因为它是个空关系。好在我们有以下命题：

7.2.11. 引理 *如果 A 是传递集，并且 $\in$ 是 A 上的良基关系，则 $A \in \mathbf{WF}$。*

证明. 假设 $A \notin \mathbf{WF}$，则 $A \not\subseteq \mathbf{WF}$。取 $X = A - \mathbf{WF}$，则 $X \subseteq A$ 非空。取 X 的 $\in$ 极小元 x，如果 $y \in x$，则 $y \notin X$。但由于 A 是传递的，所以 $y \in A$。这就蕴涵着 $y \in \mathbf{WF}$，所以 $x \subset \mathbf{WF}$，因此 $x \in \mathbf{WF}$，与 $x \in X$ 矛盾。 □

以上命题使我们引入"传递闭包"的概念显得十分自然。

7.2.12. 引理 *对任意集合 x，存在一个最小的传递集 $\mathrm{trcl}(x)$ 使得 $x \subseteq \mathrm{trcl}(x)$。*

证明. 对任意 $n < \omega$ 递归定义 x_n 如下:

$$\begin{aligned} x_0 &= x; \\ x_{n+1} &= \bigcup x_n, \end{aligned} \tag{7.5}$$

则 $\mathrm{trcl}(x) = \bigcup_{n<\omega} x_n$就是所求的集合。首先它是传递的: 对任意 $y \in \mathrm{trcl}(x)$，存在 $n < \omega$ 使得 $y \in x_n$，因此 $y \subseteq \bigcup x_n = x_{n+1} \subseteq \mathrm{trcl}(x)$。其次假设 M 是传递集且 $x \subseteq M$，如果 $x_n \subseteq M$，由 M 的传递性可得 $x_{n+1} \subseteq M$。根据归纳法，对任意 $n < \omega$，$x_n \subseteq M$，再次使用 M 的传递性，$\mathrm{trcl}(x) \subseteq M$。这就证明了 $\mathrm{trcl}(x)$ 是包含 x 的最小传递集。 □

对任意集合 x，以上定义的 $\mathrm{trcl}(x)$ 称为 x 的**传递闭包**。

7.2.13. 引理 *以下命题成立，而且它们的证明不依赖于幂集公理：*

(1) *如果 x 是传递的，则 $\mathrm{trcl}(x) = x$；*

(2) *如果 $y \in x$，则 $\mathrm{trcl}(y) \subseteq \mathrm{trcl}(x)$；*

(3) $\mathrm{trcl}(x) = x \cup \bigcup \{\mathrm{trcl}(y) \mid y \in x\}$。

证明. (1) 是平凡的。

(2) $y \in x$ 蕴涵 $y \subseteq \bigcup x \subseteq \mathrm{trcl}(x)$。

(3) $x \subseteq \mathrm{trcl}(x)$ 并且由 (2) 知 $\bigcup \{\mathrm{trcl}(y) \mid y \in x\} \subseteq \mathrm{trcl}(x)$，所以等式右边是 $\mathrm{trcl}(x)$ 的子集。另一方面，等式右边是传递集并包含 x，故 $\mathrm{trcl}(x)$ 是它的子集。

□

我们在 $\mathbf{ZF}^-$ 中可以证明:

7.2.14. 定理 对任意集合 X，以下命题等价：

(1) $X \in \mathbf{WF}$；

(2) $\text{trcl}(X) \in \mathbf{WF}$；

(3) $\in$ 是 $\text{trcl}(X)$ 上的良基关系。

证明. (1) $\Rightarrow$ (2)。我们构造 $\text{trcl}(X)$ 只递归运用了并运算，而 $\mathbf{WF}$ 对并运算封闭，所以 $\text{trcl}(X) \in \mathbf{WF}$。

(2) $\Rightarrow$ (3)。由定理7.2.10。

(3) $\Rightarrow$ (2)。引理7.2.11。

□

我们有很强的直观认为 $\mathbf{ZF}$ 的公理在 $\mathbf{WF}$ 中都是真的，因为 $\mathbf{WF}$ 对集合上的运算都是封闭的。另外，我们已经给出很多证据说明全部具体的数学都可以在 $\mathbf{WF}$ 中发生，这就很容易去作如下假定：$\mathbf{WF}$ 就是集合的宇宙 $\mathbf{V}$。说是假定，我们当然不一定要真的认为 $\mathbf{V}$ 就是 $\mathbf{WF}$。即便真的如此，我们也有进一步的疑问，因为 $\mathbf{WF}$ 自身的结构也很不清楚。$\mathbf{CH}$，$\mathbf{AC}$ 在 $\mathbf{WF}$ 中是否为真也无从确定。不过以下定理说明，只要我们接受 $\mathbf{ZF}$，我们一定会接受 $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$。

7.2.15. 定理 在 $\mathbf{ZF}^-$ 中可以证明以下命题等价：

(1) 基础公理；

(2) 对任意集合 X，$\in$ 是 X 上的良基关系；

(3) $\mathbf{V} = \mathbf{WF}$。

证明. 根据良基的定义，(1) $\Rightarrow$ (2) 是平凡的；如果 $\in$ 是任意 X 上的良基关系，特别地，$\in$ 是 $\text{trcl}(X)$ 上的良基关系，应用定理7.2.14，任意集合的传递闭包属于 $\mathbf{WF}$，所以任意集合属于 $\mathbf{WF}$，即 (2) $\Rightarrow$ (3)，即所有集合都属于 $\mathbf{WF}$；应用定理7.2.10，如果所有集合都属于 $\mathbf{WF}$，则 $\in$ 是任何集合上的良基关系，而这就是基础公理要说的，所以 (3) $\Rightarrow$ (1)。 □

前面提到，从直观上看，$\mathbf{WF}$ 是 $\mathbf{ZF}$ 的模型，但要想严格证明这一点还需很多工作。这包括确定“$\mathbf{WF}$ 是 $\mathbf{ZF}$ 的模型”这个短语的含义。

7.3 相对化

本节仍工作于 $\mathbf{ZF}^-$ 中。有些定理，例如定理7.3.4，需要特别提示读者是在 $\mathbf{ZF}^-$ 中证明的，我们注明了（$\mathbf{ZF}^-$）。

7.3.1. 定义 令 $\mathbf{M}$ 为类，而 φ 为公式，则 φ 对 $\mathbf{M}$ 的**相对化** $\varphi^{\mathbf{M}}$ 递归定义为：

(1) $(x=y)^{\mathbf{M}}$ 就是 $x=y$；

(2) $(x\in y)^{\mathbf{M}}$ 就是 $x\in y$；

(3) $(\varphi\to\psi)^{\mathbf{M}}$ 为 $\varphi^{\mathbf{M}}\to\psi^{\mathbf{M}}$；

(4) $(\neg\varphi)^{\mathbf{M}}$ 为 $\neg\varphi^{\mathbf{M}}$；

(5) $(\forall x\varphi)^{\mathbf{M}}$ 为 $(\forall x\in\mathbf{M})\varphi^{\mathbf{M}}$。

我们把 $\varphi^{\mathbf{M}}$ 读作"φ 在 $\mathbf{M}$ 中真"，这是 $M\models\varphi$[①]的集合论形式。它是通过把 φ 中的量词限制到 $\mathbf{M}$ 中得到的。严格说来，$\mathbf{M}$ 是一个公式 $\mathbf{M}(v)$，而 $(\forall x\varphi)^{\mathbf{M}}$ 实际上是公式 $\forall x(\mathbf{M}(x)\wedge\varphi^{\mathbf{M}})$。$\varphi^{\mathbf{M}}$ 是"生活在 $\mathbf{M}$ 中的数学家"对 φ 的理解，或者说是在假定 $\mathbf{V}=\mathbf{M}$ 下，φ 的意义。事实上，$\varphi^{\mathbf{V}}=\varphi$。

7.3.2. 注

(1) 其他逻辑符号的相对化可以由定义得到，例如

(a) $(\varphi\vee\psi)^{\mathbf{M}}$ 就是 $\varphi^{\mathbf{M}}\vee\psi^{\mathbf{M}}$;

(b) $(\varphi\wedge\psi)^{\mathbf{M}}$ 就是 $\varphi^{\mathbf{M}}\wedge\psi^{\mathbf{M}}$;

(c) $(\exists x\varphi)^{\mathbf{M}}$ 为 $(\exists x\in\mathbf{M})\varphi^{\mathbf{M}}$。

请验证之。

(2) 对于引入的 n-元函数符号 f，假设 $\varphi(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})$ 为定义它的公式，我们以

$$f^{\mathbf{M}}=\{(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\in\mathbf{M}\mid\varphi^{\mathbf{M}}(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\}\qquad(7.6)$$

[①] 见本章第一节。

表示 f 在 $\mathbf{M}$ 中的相对化。这当然要求

$$\mathbf{M} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \exists! x_{n+1} \varphi(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}), \tag{7.7}$$

否则 $f^{\mathbf{M}}$ 在 $\mathbf{M}$ 中就不是函数了。事实上，$f^{\mathbf{M}}$ 是生活在 $\mathbf{M}$ 中的人对 f 的理解。由于空集这样的定义对象可以看作是 0-元函数，所以

$$\emptyset^{\mathbf{M}} = \left\{x \in \mathbf{M} \mid (x \neq x)^{\mathbf{M}}\right\}。 \tag{7.8}$$

7.3.3. **定义** 对任意理论 T，任意类 $\mathbf{M}$，$\mathbf{M}$ **是** T **的模型**，记为 $\mathbf{M} \models T$，当且仅当对 T 的每一公理 φ，$\varphi^{\mathbf{M}}$ 成立。

7.3.4. **定理**（$\mathbf{ZF}^-$）$\mathbf{WF}$ 是 $\mathbf{ZF}$ 的模型。

为了证明定理7.3.4，我们工作于 $\mathbf{ZF}^-$ 中，逐个验证 $\mathbf{ZF}$ 公理在 $\mathbf{WF}$ 中为真。需要注意到，我们的证明事实上更为一般：我们将讨论每条公理在某一模型中成立的充分条件，或充分必要条件。这样，今后需要验证 $\mathbf{ZF}$ 公理在某个模型中是否为真时，只需验证该模型是否满足这些条件即可。

- **存在公理** 注意到，对任意类 $\mathbf{M}$，$(\exists x(x = x))^{\mathbf{M}}$ 就是 $\exists x \in \mathbf{M}(x = x)$，所以这条公理成立的充分必要条件就是 $\mathbf{M}$ 非空，所以存在公理在 $\mathbf{WF}$ 中真。

- **外延公理** 对任意 $\mathbf{M}$，这条公理的相对化为：

$$\forall X \in \mathbf{M} \forall Y \in \mathbf{M} \forall u \in \mathbf{M}((u \in X \leftrightarrow u \in Y) \to X = Y)。 \tag{7.9}$$

7.3.5. **引理** 如果 $\mathbf{M}$ 是传递的，则外延公理在 $\mathbf{M}$ 中真。

证明. 令 $X, Y \in \mathbf{M}$，反设 $X \neq Y$，则存在 $u \in X$，但是 $u \notin Y$（或者相反）。由于 $\mathbf{M}$ 是传递的，所以 $u \in \mathbf{M}$，故 $\exists u \in \mathbf{M} \neg(u \in X \leftrightarrow u \in Y)$。 □

由于 $\mathbf{WF}$ 是传递的，因此以上引理表明外延公理在 $\mathbf{WF}$ 中为真。

• **分离公理模式** 对任意 $\mathbf{M}$，对任意公式 φ，分离公理一个例示的相对化为：

$$\forall X \in \mathbf{M} \exists Y \in \mathbf{M} \forall u \in \mathbf{M}(u \in Y \leftrightarrow u \in X \wedge \varphi^{\mathbf{M}}(u))。\tag{7.10}$$

因此，如果对任意 $X \in \mathbf{M}$，集合 $\{u \in X \mid \varphi^{\mathbf{M}}(u)\}$ 也属于 $\mathbf{M}$，则分离公理模式就在 $\mathbf{M}$ 中真。这个条件验证起来比较困难，但是我们讨论的模型经常具有以下性质：对任意 $X \in \mathbf{M}$，X 的所有子集也在 $\mathbf{M}$ 中，即，$\mathcal{P}(X) \subset \mathbf{M}$。对这样的模型，分离公理总是真的。$\mathbf{WF}$ 正是具有以上性质的类，所以分离公理在 $\mathbf{WF}$ 中真。

• **对集公理** 显然，对任意 $\mathbf{M}$，如果对任意 x, y，$x, y \in \mathbf{M}$ 蕴涵 $\{x, y\} \in \mathbf{M}$，则对集公理在 $\mathbf{M}$ 中成立。根据引理7.2.7，$\mathbf{WF}$ 具有以上性质，所以对集公理在 $\mathbf{WF}$ 中为真。

• **并集公理** 同样，并集公理成立的充分条件是如果 $X \in \mathbf{M}$，则 $\bigcup X \in \mathbf{M}$。同样根据引理7.2.7，并集公理在 $\mathbf{WF}$ 中为真。

• **幂集公理** 对任意 $\mathbf{M}$，幂集公理的相对化为

$$\forall X \in \mathbf{M}\ \exists Y \in \mathbf{M}\ \forall u \in \mathbf{M}(u \in Y \leftrightarrow (u \subseteq X)^{\mathbf{M}})。\tag{7.11}$$

注意到 $(u \subseteq X)^{\mathbf{M}}$ 等价于 $\forall v \in \mathbf{M}(v \in u \to v \in X)$，而这又等价于 $u \cap \mathbf{M} \subseteq X$。因此，幂集公理的相对化又等价于

$$\forall X \in \mathbf{M} \exists Y \in \mathbf{M} \forall u \in \mathbf{M}(u \in Y \leftrightarrow (u \cap \mathbf{M} \subseteq X))。\tag{7.12}$$

如果 $\mathbf{M}$ 是传递的，则对于 $u \in \mathbf{M}$，$u \cap \mathbf{M} = u$，因此，如果 $X \in \mathbf{M}$，则 $(u \subseteq X)^{\mathbf{M}}$ 当且仅当 $u \subseteq X$。这样，幂集公理的相对化就是：

$$\forall X \in \mathbf{M} \exists Y \in \mathbf{M} \forall u \in \mathbf{M}(u \in Y \leftrightarrow (u \subseteq X))。\tag{7.13}$$

或者等价地，

$$\forall X \in \mathbf{M} \exists Y \in \mathbf{M}(Y = \mathcal{P}(X) \cap \mathbf{M})。\tag{7.14}$$

这也是幂集公理在传递模型中为真的充分必要条件。再次根据引理7.2.7，对任意集合 $X \in \mathbf{WF}$，$\mathcal{P}(X) \in \mathbf{WF}$，并且 $\mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X) \cap \mathbf{WF}$，所以幂集公理在 $\mathbf{WF}$ 中为真。

• **无穷公理** 直观上，无穷公理显然在 $\mathbf{WF}$ 中成立。但要严格证明，却会有一些技术上的问题。无穷公理中使用的空集和后继函数，不是集合论语言的初始概念，而是定义引入的概念。而相对化的定义则是针对初始公式的，所以我们需要验证空集和后继函数在 $\mathbf{M}$ 中的意义是否就是我们直观上所理解的意义。事实上在验证幂集公理时已经遇到这个问题，子集就是通过定义引入的关系。好在以上分析表明新引进的关系处理起来相对容易。不过，处理通过定义引入的常量和函数要困难的多，需要专门讨论，我们把这留到下一节。

• **基础公理** 对任意 $\mathbf{M}$，基础公理的相对化可表示为：

$$\forall x \in \mathbf{M}((x \neq \emptyset)^{\mathbf{M}} \to \exists y \in \mathbf{M}(y \in x \wedge (x \cap y = \emptyset)^{\mathbf{M}}))。\tag{7.15}$$

虽然这也包含了空集和交这些定义引入的概念，但我们很容易地可以将以上命题重写为：

$$\forall x \in \mathbf{M}(\exists z \in \mathbf{M}(z \in x) \to \exists y \in \mathbf{M}(y \in x \wedge \neg \exists u \in \mathbf{M}(u \in x \wedge u \in y))。\tag{7.16}$$

如果 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{WF}$，$x \in \mathbf{M}$，则取 $x \cap \mathbf{M}$ 中秩最小的元素 y，则 $y \cap x = \emptyset$。所以基础公理在 $\mathbf{WF}$ 的任何子类中都为真，所以在 $\mathbf{WF}$ 中为真。

• **替换公理模式** 对任意 $\mathbf{M}$，任意公式 $\psi(x, y)$，替换公理模式一个例示的相对化可表示为：

$$\forall A \in \mathbf{M} \forall x \in A \exists! y \in \mathbf{M} \psi^{\mathbf{M}}(x, y) \to \exists B \in \mathbf{M} \forall x \in A \exists y \in B \psi^{\mathbf{M}}(x, y)。\tag{7.17}$$

这就不难看出替换公理模式在 $\mathbf{M}$ 中成立的充分条件是：如果对任意 $A \in \mathbf{M}$，我们有 $\forall x \in A \exists! y \in \mathbf{M} \psi^{\mathbf{M}}(x, y)$，则存在 $B \in \mathbf{M}$ 使得

$$\{y \in \mathbf{M} \mid \exists x \in A(\psi^{\mathbf{M}}(x, y))\} \subseteq B。\tag{7.18}$$

特别地，如果 $\mathbf{M} = \mathbf{WF}$，则 $\{y \in \mathbf{WF} \mid \exists x \in A(\psi^{\mathbf{WF}}(x, y))\} \subset \mathbf{WF}$，所以属于 $\mathbf{WF}$。

综上所述，我们在 $\mathbf{ZF}^-$ 中证明了 $\mathbf{WF} \vDash \mathbf{ZF} - \mathrm{Inf}$，其中 Inf 表示无穷公理。为了完成定理7.3.4，我接下来讨论“绝对性”这一概念。

7.4 绝对性

在上一节我们遇到了由定义引入的概念的问题，如空集和后继函数。如果仅仅是这两个概念，当然容易处理，但是今后的证明中我们会遇到大量类似的，但更为复杂的概念。为此，我们在这里集中讨论这一问题，为今后的证明扫清障碍。

7.4.1. **定义** 对任意集合论形式语言的公式 $\psi(x_1,\ldots,x_n)$，对任意类 $\mathbf{M},\mathbf{N}$，$\mathbf{M}\subseteq\mathbf{N}$，如果

$$\forall x_1\cdots\forall x_n\in\mathbf{M}(\psi^{\mathbf{M}}(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\psi^{\mathbf{N}}(x_1,\ldots,x_n)), \tag{7.19}$$

就称 $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ **对于 $\mathbf{M},\mathbf{N}$ 是绝对的**。如果 $\mathbf{N}=\mathbf{V}$，则称 $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ **对于 $\mathbf{M}$ 是绝对的**。

7.4.2. **引理** 假设 $\mathbf{M}\subseteq\mathbf{N}$，并且 φ,ψ 是公式，则

(1) 如果 φ,ψ 相对于 $\mathbf{M},\mathbf{N}$ 是绝对的，则 $\neg\varphi,\varphi\rightarrow\psi$ 也是如此；

(2) 如果 φ 不含量词，则 φ 对任意 $\mathbf{M}$ 都是绝对的；

(3) 如果 $\mathbf{M},\mathbf{N}$ 都是传递的，并且 φ 相对于它们是绝对的，则 $\forall x\in y\varphi$ 也是如此。

7.4.3. **注** 形如 $\forall x\in y\cdots$ 的这类量词称为**受囿量词**，所以 (3) 是说如果 φ 对于传递模型是绝对的，则 φ 加上受囿量词也是绝对的。

证明. (1)，(2) 由定义，显然。对于 (3)，首先注意 $\forall x\in y\varphi$ 是 $\forall x(x\in y\rightarrow\varphi)$ 的简写。这样 $(\forall x\in y\varphi)^{\mathbf{M}}$ 就等于

$$\forall x\in\mathbf{M}(x\in y\rightarrow\varphi^{\mathbf{M}})。$$

假设 $y\in\mathbf{M}$，(注意，φ 可能有其他自由变元，但这不影响。) 由于 $\mathbf{M}$ 是传递的，这当且仅当 $\forall x(x\in y\rightarrow\varphi^{\mathbf{M}})$，由 φ 是绝对的以及 $\mathbf{N}$ 是传递的，即可得到结论。 □

为了证明公式的绝对性，以下概念非常有用。

7.4.4. 定义 Δ_0 **公式**定义如下：

(1) $x = y$，$x \in y$ 是 Δ_0 公式；

(2) 如果 φ,ψ 是 Δ_0 公式，则 $\neg\varphi,\varphi \to \psi$ 是 Δ_0 公式；

(3) 如果 φ 是 Δ_0 公式，y 是任意集合，则 $(\forall x \in y)\varphi$ 是 Δ_0 公式。

假设 φ 是 Δ_0 公式，则形如 $\exists x_1 \cdots \exists x_n \varphi$ 的公式称为Σ_1 **公式**，形如 $\psi = \forall x_1 \cdots \forall x_n \varphi$ 的公式称为Π_1 **公式**。

由于传递模型在 $\in$ 关系下是向下封闭的，因此它总是能保持对约束量词的解释，即 Δ_0 公式对于传递模型是绝对的。

7.4.5. 引理 令 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ 皆为传递的，$\psi(x_0, \ldots, x_n)$ 为集合论语言的公式则

(1) 如果 ψ 是 Δ_0 公式，则它对于 $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ 是绝对的；

(2) 如果 ψ 是 Σ_1 公式，则

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n(\psi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \to \psi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n));$$

(3) 如果 ψ 是 Π_1 公式，则

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n(\psi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n) \to \psi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n))。$$

证明. 见习题7.10.6。 □

有一个问题是 Δ_0 公式很少见，这样的话，引理7.4.5的作用就会十分有限。不过，以下定理可以使我们把引理 7.4.5充分发挥出来。

7.4.6. 引理 假设 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ 并且皆是语句集 Σ 的模型，而

$$\Sigma \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_n(\varphi(x_1 \cdots x_n) \leftrightarrow \psi(x_1 \cdots x_n)), \tag{7.20}$$

则 φ 对 $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ 是绝对的当且仅当 ψ 也是。

证明. 留给读者作为练习。 □

这样，对于非 Δ_0 公式 φ，我们只要在，例如 $\mathbf{ZF}^-$，中能证明 φ 等价于某一 Δ_0 公式，同样可以得到它相对于两个 $\mathbf{ZF}^-$ 模型的绝对性。

在讨论无穷公理时，我们遇到的困难是 $\emptyset$ 和后继，它们是定义的函数。而要证明无穷公理在 $\mathbf{WF}$ 中为真，则需要证明这些函数相对于 $\mathbf{WF}$ 的绝对性，而这要首先明确函数绝对性的含义。

7.4.7. **定义** 假设 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$，$f(x_1, \cdots, x_n)$ 是函数，则 f **相对于** $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ **是绝对的**当且仅当定义 f 的公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$ 也是绝对的，因此 f 相对于 $\mathbf{M}$ 是绝对的当且仅当 $f^{\mathbf{M}} = f \restriction \mathbf{M}$。

接下来我们证明一系列公式相对于 $\mathbf{ZF}^-$ 的传递模型 $\mathbf{M}$ 的绝对性。在很多情形下，我们并不需要 $\mathbf{ZF}^-$ 的全部公理，至少幂集公理 Pow 和无穷公理 Inf 不是必须的。

7.4.8. **定理** 以下关系和函数可以在 $\mathbf{ZF}^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 中用公式定义，并且这些公式在 $\mathbf{ZF}^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 中可以证明等价于某一 Δ_0 公式。所以它们对任意 $\mathbf{ZF}^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 的传递模型 $\mathbf{M}$ 都是绝对的。

(1) $x \in y$；

(2) $x = y$；

(3) $x \subset y$；

(4) $\{x, y\}$；

(5) $\{x\}$；

(6) (x, y)；

(7) $\emptyset$；

(8) $x \cup y$；

(9) $x \cap y$；

(10) $x - y$；

(11) x^+，即 $x \cup \{x\}$；

(12) x 是传递集；

(13) $\bigcup x$；

(14) $\bigcap x$，其中规定 $\bigcap \emptyset = \emptyset$。

证明. (1)，(2) 显然。

(3) 由定义 $x \subset y \leftrightarrow \forall z \in x (z \in y)$，等值式右边为 Δ_0 公式。

(4) 取 Δ_0 公式 $\psi(x,y,z)$ 为

$$x \in z \wedge y \in z \wedge \forall u \in z(u = x \vee u = y), \tag{7.21}$$

则 $\psi(x,y,z) \leftrightarrow z = \{x,y\}$。

(5) 类似于 4。

(6) 取公式 $\psi(x,y,z)$ 为

$$\exists u \in z \exists v \in z(u = \{x,x\} \wedge v = \{x,y\} \wedge z = \{u,v\}), \tag{7.22}$$

则 $\psi(x,y,z) \leftrightarrow z = (x,y)$，并且 ψ 等值于 Δ_0 公式。

(7) 取公式 $\psi(x)$ 为:

$$\forall y \in x(y \neq y)。 \tag{7.23}$$

(8) 取公式 $\psi(x,y,z)$ 为

$$\forall u \in z(u \in x \vee u \in y) \wedge \forall u \in x(u \in z) \wedge \forall u \in y(u \in z), \tag{7.24}$$

则 $\psi(x,y,z) \leftrightarrow z = x \cup y$。

(9) 取公式 $\psi(x,y,z)$ 为

$$\forall u \in z(u \in x \wedge u \in y) \wedge \forall u \in x(u \in y \to u \in z), \tag{7.25}$$

则 $\psi(x,y,z) \leftrightarrow z = x \cap y$。

(10) 取公式 $\psi(x,y,z)$ 为

$$\forall u \in z(u \in x \wedge u \notin y) \wedge \forall u \in x(u \notin y \to u \in z), \tag{7.26}$$

则 $\psi(x,y,z)$ 表达 $z = x - y$。

(11) 取公式 $\psi(x,y)$ 为:

$$x \in y \wedge x \subset y \wedge \forall z \in y(z = x \vee z \in x), \tag{7.27}$$

则 $\psi(x,y) \leftrightarrow y = x^+$。

(12) 取公式 $\psi(x)$ 为

$$\forall y \in x \forall z \in y(z \in x), \tag{7.28}$$

则公式 $\psi(x)$ 当且仅当 x 是传递集。

(13) 取公式 $\psi(x,y)$ 为

$$\forall u \in y \exists v \in x(u \in v) \wedge \forall u \in x \forall v \in u(v \in y), \tag{7.29}$$

则 $\psi(x,y) \leftrightarrow y = \bigcup x$。

(14) 取公式 $\psi(x,y)$ 为

$$\forall u \in y \forall v \in x(u \in v) \wedge \forall u \in x \forall v \in u(\forall w \in x(v \in w) \to (v \in y)), \tag{7.30}$$

则 $\psi(x,y) \leftrightarrow y = \bigcap x$。

□

接下来的引理可以简化很多绝对性证明：

7.4.9. **引理** 绝对性对复合运算封闭，即，假设 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$，公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，函数 $f(x_1, \cdots, x_n)$，$g_i(y_1, \cdots, y_m)$，$1 \le i \le n$，都是相对于 $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ 绝对的，则以下公式

$$\varphi(g_1(y_1, \cdots, y_m), \cdots, g_n(y_1, \cdots, y_m)) \tag{7.31}$$

和函数

$$f(g_1(y_1, \cdots, y_m), \cdots, g_n(y_1, \cdots, y_m)) \tag{7.32}$$

也是相对于 $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ 绝对的。

证明. 不妨假设 $n = m = 1$，则

$$(\varphi(g(y)))^{\mathbf{M}} \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{M}}(g^{\mathbf{M}}(y))) \leftrightarrow \varphi^{\mathbf{N}}(g^{\mathbf{N}}(y))) \leftrightarrow \varphi(g(y)))^{\mathbf{N}}, \tag{7.33}$$

因为 $g^{\mathbf{M}}(y) = g^{\mathbf{N}}(y)$，而 φ 对于 $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ 是绝对的。函数的情况类似。 □

7.4.10. **定理** 以下关系和函数对任意 $\mathbf{ZF}^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 的传递模型都是绝对的：

(1) z 是有序对；

(2) $A \times B$；

(3) R 是关系；

(4) $\mathrm{dom}(R)$；

(5) $\mathrm{ran}(R)$；

(6)　f 是函数；

(7)　$f(x)$；

(8)　f 是一一函数。

证明.　　(1)　z 是有序对当且仅当 $\exists x \in \bigcup z \exists y \in \bigcup z(z = (x, y))$。令 $g_1(z) = g_2(z) = \bigcup z$，由定理7.4.8知，$g_1, g_2$ 是绝对的。令 $g_3(z) = z$，$\varphi(u, v, w)$ 为以下公式:

$$\exists x \in u \exists y \in v(w = (x, y))。\tag{7.34}$$

φ 是绝对的，因为由定理7.4.8，$w = (x, y)$ 是绝对的，而且 φ 中的量词都是约束的。最后，z 是有序对当且仅当

$$\varphi(g_1(z), g_2(z), g_3(z)),\tag{7.35}$$

由引理7.4.9，它是绝对的。

以下证明都与（1）类似，主要应用定理7.4.8和引理 7.4.9，我们不再如此详细，而是满足于写出相应的公式，其绝对性可根据（1）中的方法证明。

(2)　取公式 $\psi(x, y, z)$ 为

$$\forall u \in z \exists s \in x \exists t \in y(u = (s, t)) \wedge \forall s \in x \forall t \in y \exists u \in z(u = (s, t)),\tag{7.36}$$

则 $\psi(x, y, z) \leftrightarrow z = x \times y$。

(3)　取公式 $\psi(R)$ 为

$$\forall u \in R(u \text{ 是有序对}),\tag{7.37}$$

则 $\psi(R)$ 当且仅当 R 是二元关系。

(4)　取公式 $\psi(D, R)$ 为

$$\begin{aligned}&\forall x \in D \exists z \in R \exists u \in z \exists y \in u(z = (x, y)) \wedge \\ &\forall z \in R \forall u \in z \forall x \in u \forall y \in u(z = (x, y) \rightarrow x \in D),\end{aligned}\tag{7.38}$$

则 $\psi(D, R) \leftrightarrow D = \mathrm{dom}(R)$。

(5) 取公式 $\psi(C,R)$ 为

$$\begin{aligned}&\forall y\in C\exists z\in R\exists u\in z\exists x\in u(z=(x,y))\wedge\\&\forall z\in R\forall u\in z\forall x\in u\forall y\in u(z=(x,y)\to y\in C),\end{aligned}\tag{7.39}$$

则 $\psi(C,R)\leftrightarrow C=\mathrm{ran}(R)$。

(6) 取公式 $\psi(f)$ 为

$$\begin{aligned}&f\text{ 是二元关系 }\wedge\\&\forall u,v\in f\forall s\in u\forall t\in v\forall a,b\in s\forall c\in t((u=(a,b)\wedge v=(a,c))\to b=c),\end{aligned}\tag{7.40}$$

则公式 $\psi(f)$ 当且仅当 f 是函数。

(7) 取公式 $\psi(f,x,y)$ 为

$$(\varphi(f,x)\wedge(x,y)\in f)\vee(\neg\varphi(f,x)\wedge y=\emptyset),\tag{7.41}$$

其中 $\varphi(f,x)$ 为公式:

$$\exists v\in\bigcup\bigcup f((x,v)\in f\wedge\forall w\in\bigcup\bigcup f((x,w)\in f\to v=w)),\tag{7.42}$$

则 $\psi(f,x,y)\leftrightarrow y=f(x)$。

(8) 取公式 $\psi(f)$ 为

$$f\text{ 是函数 }\wedge\forall x\in\mathrm{dom}(f)\forall y\in\mathrm{dom}(f)(f(x)=f(y)\to x=y),\tag{7.43}$$

则 f 是一一函数当且仅当 $\psi(f)$。

□

7.5 基础公理的相对一致性

上一节我们在证明 $\mathbf{WF}\models\mathbf{ZF}$ 时，只剩下无穷公理尚未验证，而有了这些绝对性结果，我们现在可以证明:

7.5.1. 引理 假设传递类 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{ZF}^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 的模型，并且 $\omega\in\mathbf{M}$，则无穷公理在 $\mathbf{M}$ 中为真。因此，无穷公理在 $\mathbf{WF}$ 中为真。

证明. 由于 $\emptyset$ 和后继 x^+ 函数都相对于 $\mathbf{M}$ 是绝对的，所以无穷公理的相对化为：

$$\exists x \in \mathbf{M}(\emptyset \in x \wedge \forall y \in x(y^+ \in x))。\tag{7.44}$$

又由于 $\omega \in \mathbf{M}$，所以取 $x = \omega$ 即可。 □

至此我们完成了定理7.3.4的证明，而以下定理揭示了定理7.3.4的动机。

7.5.2. **定理** 设 T 是集合论语言中的理论（例如 $\mathbf{ZF}^-$），而 Σ 是集合论语言中的语句集（如 $\mathbf{ZF}$），再假设 $\mathbf{M}$ 为类，并且在 T 中可证 $\mathbf{M} \neq \emptyset$。那么，如果在 T 中可以证明 $\mathbf{M} \models \Sigma$，或等价地，对每一 $\sigma \in \Sigma$，都可在 T 中证明 $\sigma^{\mathbf{M}}$，则

(1) 对集合论语言的任何语句 φ，如果 $\Sigma \vdash \varphi$，则 $T \vdash \varphi^{\mathbf{M}}$；

(2) 如果 T 一致，则以 Σ 为公理的理论也一致。

证明. 对于 (1)，可对 Σ 到 φ 的证明施归纳而容易得到。这是数理逻辑中的一个常见的证明。可能很多读者并不熟悉逻辑，所以我们还是简要叙述证明如下：

假设 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是 Σ 到 φ 的证明（参见1.2节），对任意 $1 \leq i \leq n$，如果 φ_i 属于 Σ，则根据题设，$T \vdash \varphi_i^{\mathbf{M}}$；如果 φ_i 是逻辑公理，则显然也成立。最后，如果 φ_i 由在它之前的公式 φ_j 和 $\varphi_k = \varphi_j \to \varphi_i$ 得到，根据归纳假设，已经有 $T \vdash \varphi_j^{\mathbf{M}}$ 和 $T \vdash \varphi_k^{\mathbf{M}}$，所以 $T \vdash \varphi_i^{\mathbf{M}}$。

(2) 可由 (1) 容易推得：如果以 Σ 为公理的理论不一致，则存在语句 φ，$\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$，而由 (1)，$T \vdash \varphi^{\mathbf{M}} \wedge \neg\varphi^{\mathbf{M}}$，即 T 也不一致。 □

7.5.3. **定理** 基础公理相对于 $\mathbf{ZF}^-$ 是一致的，即，如果 $\mathbf{ZF}^-$ 一致，则 $\mathbf{ZF}$ 一致。

证明. 应用定理7.5.2，令 T 为 $\mathbf{ZF}^-$，Σ 为 $\mathbf{ZF}$，$\mathbf{M}$ 为 $\mathbf{WF}$。 □

接下来两章的主要定理都是某种形式的相对一致性证明，虽然要比定理7.3.4 复杂得多。而且在证明定理7.3.4的过程中，我们还引入了相对化和绝对性这些概念，这些都是接下来十分关键的工具。另外重要的一点是，在证明中我们分析了 **ZF** 的公理在某一模型中为真的条件，这些条件也为以后的相对一致性证明提供了方便。不过，至今我们还未讨论选择公理，所以我们接下来讨论这一公理。

7.5.4. **引理** ($\mathbf{ZF}^-$) 假设 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{ZF}^- - \mathrm{Pow} - \mathrm{Inf}$ 的传递模型。如果 $X, R \in \mathbf{M}$ 并且 R 是 X 上的良序，则

$$(R \text{ 是 } X \text{ 上的良序 })^{\mathbf{M}}。 \tag{7.45}$$

证明. 首先，“R 是 X 上的线序”可表达为以下公式 $\varphi(X, R)$:

$$\begin{aligned}\forall x \in X(\neg(xRx)) \wedge \forall x, y, z \in X(xRy \wedge yRz \to xRz) \\ \wedge \forall x, y \in X(xRy \wedge yRx \to x = y) \\ \wedge \forall x, y \in X(xRy \vee yRx \vee x = y),\end{aligned} \tag{7.46}$$

而这是一个 Δ_0 公式。令公式 $\psi(X, Y, R)$ 为

$$Y \subseteq X \wedge Y \neq \emptyset \to \exists y \in Y \forall x \in Y \neg(xRy), \tag{7.47}$$

则“R 是 X 上的良序”可表达为 $\varphi(X, R) \wedge \forall Y \psi(X, Y, R)$。由于 $\varphi(X, R), \psi(X, Y, R)$ 是绝对的，因此只需证明 $\forall Y \in \mathbf{M} \psi(X, Y, R)$。而根据假设，$R$ 是 X 上的良序，所以对任意 Y，$\psi(X, Y, R)$ 都成立。

□

7.5.5. **定理** ($\mathbf{ZF}^-$) V_ω 是 $\mathbf{ZFC} - \mathrm{Inf} + \neg\mathrm{Inf}$ 的模型。

证明. 由前面的讨论不难看出 V_ω 是 $\mathbf{ZF} - \mathrm{Inf} + \neg\mathrm{Inf}$ 的模型，见习题7.10.9。对任意 $X \in V_\omega$，X 是有穷的，所以存在 X 上的良序。由引理7.5.4，$V_\omega \models \mathbf{AC}$。

□

7.5.6. **推论** $\mathrm{Con}(\mathbf{ZF}^-) \to \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC} - \mathrm{Inf} + \neg\mathrm{Inf})$。

7.6 基于良基关系的归纳与递归

我们已经熟悉良序集上的超穷归纳与递归，既然良基关系是良序的推广，那么同样的思想也可推广到良基关系上。具体来说，假设 $(X, <)$ 是良

基集，即 $<$ 是 X 上的良基关系，如果我们要证明 $\forall x \in X\varphi(x)$，则可以通过证明对任意 $x \in X$：

$$\forall y \in X(y < x \to \varphi(y)) \to \varphi(x) \tag{7.48}$$

来实现。如果有 $x \in X$ 使得 $\neg\varphi(x)$，则非空集合 $\{x \in X \mid \neg\varphi(x)\}$ 的极小元就会导致矛盾。也与良序关系上的递归一样，考虑真类上的相关概念更为有用。

本节我们工作于 $\mathbf{ZF}^- - \mathrm{Pow}$ 中。

7.6.1. **定义** $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上的良基关系当且仅当

$$\forall U \subset \mathbf{X}(U \neq \emptyset \to \exists y \in U(\neg\exists z \in U(z\boldsymbol{R}y)))。\tag{7.49}$$

注意到，这一定义与集合的情况只是表面类似，事实上它是一个定义模式，就像替换公理模式一样。给定公式 $\boldsymbol{R}$ 和 $\mathbf{X}$，以上定义是另一公式的缩写，例如“$\in$ 是 $\mathbf{V}$ 上的良基关系”等价于基础公理。

一个更需注意的问题是，以上定义中 U 的取值范围是类 $\mathbf{X}$ 的所有子集，而不能是 $\mathbf{X}$ 的某个子类，因为量词不能用来约束类。但是，当我们使用递归证明时，却需要考虑 $\{x \in \mathbf{X} \mid \neg\varphi(x)\}$ 的 $\boldsymbol{R}$ 最小元，而前者却可能是真类。所以，我们对关系 $\boldsymbol{R}$ 必须有进一步的要求，以避免以上问题。

7.6.2. **定义** $\mathbf{X}$ 上的关系 $\boldsymbol{R}$ 是**似集合的**（set-like）当且仅当对任意 $x \in \mathbf{X}$，$\{y \in \mathbf{X} \mid y\boldsymbol{R}x\}$ 是一个集合。

例如，$\in$ 在任何类 $\mathbf{X}$ 上都是似集合的。一般称集合 $\{y \in \mathbf{X} \mid y\boldsymbol{R}x\}$ 中的元素为 x 的**前驱**。如果 $\boldsymbol{R}$ 就是 $\in$，则 x 的前驱即是 x 的元素，而 x 前驱的前驱即 x 元素的元素，所以以下定义是对传递闭包的推广。

7.6.3. **定义** 如果 $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上的似集合关系，并且 $x \in \mathbf{X}$，则递归定义

$$\begin{aligned}\mathrm{pred}^0(\mathbf{X}, x, \boldsymbol{R}) &= \{y \in \mathbf{X} \mid y\boldsymbol{R}x\}\,;\\ \mathrm{pred}^{n+1}(\mathbf{X}, x, \boldsymbol{R}) &= \bigcup\{\mathrm{pred}(\mathbf{X}, y, \boldsymbol{R}) \mid y \in \mathrm{pred}^n(\mathbf{X}, x, \boldsymbol{R})\}\,;\\ \mathrm{cl}(\mathbf{X}, x, \boldsymbol{R}) &= \bigcup_{n\in\omega} \mathrm{pred}^n(\mathbf{X}, x, \boldsymbol{R})。\end{aligned} \tag{7.50}$$

注意到，对任意 n，$\mathrm{pred}^n(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})$ 都是集合，所以 $\mathrm{cl}(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})$ 也是集合。通常把 $\mathrm{pred}^0(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})$ 记作 $\mathrm{pred}(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})$。如果 $\boldsymbol{R}$ 是就是 $\in$ 而 $\mathbf{X}$ 是传递的，则 $\mathrm{pred}(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})=x$，而 $\mathrm{cl}(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})=\mathrm{trcl}(x)$。

7.6.4. **引理** *如果 $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上的似集合关系，则对任意 $y\in\mathrm{cl}(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})$，$\mathrm{pred}(\mathbf{X},y,\boldsymbol{R})\subseteq\mathrm{cl}(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})$。*

证明. $y\in\mathrm{cl}(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})$，则存在 $n\in\omega$，$y\in\mathrm{pred}^n(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})$，因而 $\mathrm{pred}^n(\mathbf{X},y,\boldsymbol{R})\subseteq\mathrm{pred}^{n+1}(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})\subseteq\mathrm{cl}(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})$。 □

7.6.5. **定理** *如果 $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上的良基关系，并且是似集合的，则 $\mathbf{X}$ 的每一非空子类 $\mathbf{Y}$ 都有 $\boldsymbol{R}$ 极小元。*

证明. 任取 $x\in\mathbf{Y}$，若 x 不是 $\mathbf{Y}$ 的 $\boldsymbol{R}$ 极小元，则 $\mathbf{Y}\cap\mathrm{cl}(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})$ 是 $\mathbf{X}$ 的非空子集，因此有 $\boldsymbol{R}$ 极小元 y。由引理 7.6.4，y 是 $\mathbf{Y}$ 的极小元，否则 $\mathbf{Y}$ 中 y 的前驱都是 $\mathbf{Y}\cap\mathrm{cl}(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})$ 的元素，与 y 是极小元矛盾。 □

事实上，定理7.6.5就是似集合良基关系上的归纳原理。例如，假设基础公理，$\in$ 就是 $\mathbf{V}$ 上的似集合良基关系。由于我们可以证明，对任意集合 x，$x\subset\mathbf{WF}\to x\in\mathbf{WF}$，则应用以上归纳原理，就得到 $\mathbf{V}=\mathbf{WF}$。

以下定理表明：对任意似集合的良基关系，递归定理同样成立，而基于序数的递归定理是它的一个特殊情况。

7.6.6. **定理** *假设 $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上的似集合的良基关系。如果 $\mathbf{F}:\mathbf{X}\times\mathbf{V}\to\mathbf{V}$ 是"函数"，则存在唯一的 $\mathbf{G}:\mathbf{X}\to\mathbf{V}$ 使得*

$$\forall x\in\mathbf{X}(\mathbf{G}(x)=\mathbf{F}(x,\mathbf{G}\restriction\mathrm{pred}(\mathbf{X},x,\boldsymbol{R})))。\tag{7.51}$$

作为以上定理的应用，我们可以定义

7.6.7. **定义** *如果 $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上的似集合良基关系，定义*

$$\mathrm{rank}(x,\mathbf{X},\boldsymbol{R})=\sup\{\mathrm{rank}(y,\mathbf{X},\boldsymbol{R})+1\mid y\boldsymbol{R}x\wedge y\in\mathbf{X}\}。\tag{7.52}$$

注意到，应用定理7.6.6，取 $\mathbf{F}$ 为

$$\mathbf{F}(x,h)=\sup\{\alpha+1\mid\alpha\in\mathrm{ran}(h)\}。\tag{7.53}$$

即可得到上面的定义。而引理7.2.5 (4) 则正是 $\boldsymbol{R}$ 为 $\in$，$\mathbf{X}$ 为 $\mathbf{WF}$ 的情况。

7.6.8. **引理** (ZF$^-$) 如果 $\mathbf{X}$ 是传递的而 $\in$ 是 $\mathbf{X}$ 上的良基关系，则 $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{WF}$，并且对任意 $x \in \mathbf{X}$，$\text{rank}(x, \mathbf{X}, \in) = \text{rank}(x)$。

证明. 如果 $\mathbf{X} \nsubseteq \mathbf{WF}$，则取 x 为 $\mathbf{X} - \mathbf{WF}$ 的极小元。由于 $\mathbf{X}$ 是传递的，如果 $z \in x$，则 $z \in \mathbf{X}$，再由 x 的定义知 $z \in \mathbf{WF}$，即，$x \subset \mathbf{WF}$，所以 $x \in \mathbf{WF}$，矛盾。命题的第二断言类似，只要考虑集合 $\{x \in \mathbf{X} \mid \text{rank}(x, \mathbf{X}, \in) \neq \text{rank}(x)\}$ 的极小元。 □

任意一个结构 $(\mathbf{X}, \boldsymbol{R})$，如果 $\boldsymbol{R}$ 是似集合的良基关系，并且还是“外延的”(定义见7.6.11)，则 $(\mathbf{X}, \boldsymbol{R})$ 可以同构嵌入到 $\mathbf{WF}$ 中，这就是著名的“莫斯托夫斯基坍塌定理”。

7.6.9. **定义** 令 $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上的似集合良基关系，$(\mathbf{X}, \boldsymbol{R})$ 上的**莫斯托夫斯基函数**（Mostowski function）$\mathbf{G}$ 定义为

$$\mathbf{G}(x) = \{\mathbf{G}(y) \mid y \in \mathbf{X} \wedge y\boldsymbol{R}x\}。 \tag{7.54}$$

而 $\mathbf{G}$ 的值域，通常记为 $\mathbf{M}$，称为 $(\mathbf{X}, \boldsymbol{R})$ 的**莫斯托夫斯基坍塌**（Mostowski collapse）。

7.6.10. **引理** 令 $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上的似集合良基关系，$\mathbf{G}$ 是其上的莫斯托夫斯基函数，$\mathbf{M}$ 为 $(\mathbf{X}, \boldsymbol{R})$ 的莫斯托夫斯基坍塌，则

(1) $\forall x, y \in \mathbf{X}(x\boldsymbol{R}y \to \mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y))$；

(2) $\mathbf{M}$ 是传递的；

(3) 如果幂集公理成立，则 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{WF}$；

(4) 假设幂集公理成立，并且 $x \in \mathbf{X}$，则 $\text{rank}(x, \mathbf{X}, \boldsymbol{R}) = \text{rank}(\mathbf{G}(x))$。

证明. (1) 和 (2) 可由 $\mathbf{G}$ 的定义立得。

(3) 注意，没有幂集公理我们得不到 $\mathbf{WF}$ 的定义。我们只需证明：对任意 $x \in \mathbf{X}$，$\mathbf{G}(x) \in \mathbf{WF}$。这可以由归纳得到：假设 $\mathbf{Y} = \mathbf{M} - \mathbf{WF}$ 非空，令 y 是 $\mathbf{Y}$ 的最小元。容易证明 $y \subseteq \mathbf{WF}$，而这蕴涵 $y \in \mathbf{WF}$。

(4) 同样使用归纳，只需注意到

$$\text{rank}(\mathbf{G}(x)) = \sup\{\text{rank}(v)+1 \mid v \in \mathbf{G}(x)\},$$

而根据 $\mathbf{G}$ 的定义，这又等于 $\sup\{\text{rank}(\mathbf{G}(y))+1 \mid y\boldsymbol{R}x\}$。

□

在很多情况下，莫斯托夫斯基函数是一个同构，条件是，如果将 $\boldsymbol{R}$ 解释为 $\in$，外延公理在 $\mathbf{X}$ 中为真。

7.6.11. **定义** *$\boldsymbol{R}$ 在 $\mathbf{X}$ 上是外延的当且仅当*

$$\forall x, y \in \mathbf{X}(\forall z \in \mathbf{X}(z\boldsymbol{R}x \leftrightarrow z\boldsymbol{R}y) \rightarrow x = y)。 \tag{7.55}$$

7.6.12. **练习** $\boldsymbol{R}$ 是外延的当且仅当对任意 $x, y \in \mathbf{X}$，

$$x \neq y \rightarrow \text{pred}(\mathbf{X}, x, \boldsymbol{R}) \neq \text{pred}(\mathbf{X}, y, \boldsymbol{R})。$$

7.6.13. **引理** *如果 $\mathbf{X}$ 是传递的，则 $\in$ 在 $\mathbf{X}$ 上是外延的。*

证明. $\text{pred}(\mathbf{X}, x, \in) = x$。 □

7.6.14. **引理** *令 $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上的似集合良基关系，$\mathbf{G}$ 是其上的莫斯托夫斯基函数，如果 $\boldsymbol{R}$ 在 $\mathbf{X}$ 上是外延的，则 $\mathbf{G}$ 是同构，即，$\mathbf{G}$ 是一一的，并且对任意 $x, y \in \mathbf{X}$，$x\boldsymbol{R}y$ 当且仅当 $\mathbf{G}(x) \in \mathbf{G}(y)$。*

证明. 反设 $\mathbf{G}$ 不是一一的。即 $\mathbf{Y} = \{x \in \mathbf{X} \mid \exists y \in \mathbf{X}(x \neq y \wedge \mathbf{G}(x) = \mathbf{G}(y)\}$ 非空。取 x_0 是它的 $\boldsymbol{R}$ 最小元，并任取 y_0 满足 $x_0 \neq y_0$ 并且 $\mathbf{G}(x_0) = \mathbf{G}(y_0)$。由于 $\boldsymbol{R}$ 是外延的，所以一定有 $z \in \mathbf{X}$ 使得 $z\boldsymbol{R}x_0$ 但 $\neg z\boldsymbol{R}y_0$，或者 $z\boldsymbol{R}y_0$ 但 $\neg z\boldsymbol{R}x_0$。不失一般性，假设是第一种情况，则因为 $\mathbf{G}(z) \in \mathbf{G}(x_0) = \mathbf{G}(y_0)$，所以存在 $z'\boldsymbol{R}y_0$ 使得 $\mathbf{G}(z') = \mathbf{G}(z)$。但显然 $z' \neq z$，这与 x_0 是极小元矛盾。 □

7.6.15. **莫斯托夫斯基坍塌定理** 令 $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上的似集合良基关系，并且在 $\mathbf{X}$ 上是外延的，则存在传递类 $\mathbf{M}$ 和双射 $\mathbf{G}:\mathbf{X}\to\mathbf{M}$ 满足：$\mathbf{G}$ 是 $(\mathbf{X},\boldsymbol{R})$ 与 $(\mathbf{M},\in)$ 之间的同构。另外，$\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{G}$ 都是唯一的。

证明. 引理7.6.14证明了其存在性，而唯一性则可由归纳容易得到，见习题7.10.7。 □

例如，假设 $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上的良序，如果 $\mathbf{X}$ 是集合，则 $\mathbf{M}$ 是一个序数。如果 $\mathbf{X}$ 是真类，则 $\mathbf{M}=\mathbf{On}$。

7.7 基础公理下的绝对性

回到对基础公理和模型的讨论。既然基础公理是一致的，它可以作为一条基本公理加入到 $\mathbf{ZF}^-$。所以在本节我们将工作于 $\mathbf{ZF}$ 中。基础公理保证了 $\in$ 是良基关系，而这可以得到大量新的绝对性结果。

7.7.1. **定理** 以下关系和函数可以在 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 中用公式定义，并且这些公式在 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 中可以证明等价于某一 Δ_0 公式。所以它们对任意 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的传递模型都是绝对的。

(1) x 是序数；

(2) x 是极限序数；

(3) x 是后继序数；

(4) ω；

(5) x 是有穷序数；

(6) $0,1,2,\cdots,20,\cdots$。

证明. (1) 基础公理保证了 $\in$ 是良基的，所以在 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的框架下，x 是序数当且仅当 x 是传递集并且 $\in$ 是 x 上的线序，所以取公式 $\psi(x)$ 为

$$x\text{ 是传递集}\wedge\forall y\in x\forall z\in x(y=z\vee y\in z\vee z\in y),\tag{7.56}$$

则 $\psi(x)$ 当且仅当 x 是序数。由于已经证明“x 是传递”的是绝对的，所以 $\psi(x)$ 是绝对的。这里用到了前面的绝对结果，之所以合理，是因为前面的结果都在 $\mathbf{ZF}^- - \mathrm{Pow}$ 中得到，自然可以在 $\mathbf{ZF} - \mathrm{Pow}$ 中证明，并且任何 $\mathbf{ZF} - \mathrm{Pow}$ 的模型都是 $\mathbf{ZF}^- - \mathrm{Pow}$ 的模型。下面的证明类似。

(2) 取公式 $\psi(x)$ 为

$$x \text{ 是序数} \wedge \forall y \in x \exists z \in x (y \in z), \tag{7.57}$$

则 $\psi(x)$ 表示 x 是极限序数。

(3) 取公式 $\psi(x)$ 为

$$x \text{ 是序数} \wedge \neg(x \text{ 是极限序数}), \tag{7.58}$$

则公式 $\psi(x)$ 表示 x 是后继序数。

(4) 取公式 $\psi(x)$ 为

$$x \text{ 是极限序数} \wedge \emptyset \in x \wedge \forall y \in x (y \text{是极限序数} \rightarrow y = \emptyset), \tag{7.59}$$

则 $\psi(x) \leftrightarrow x = \omega$。

(5) 取公式 $\psi(x)$ 为

$$x \text{ 是序数} \wedge \neg(x = \omega) \wedge \forall y \in x \neg(y = \omega), \tag{7.60}$$

则公式 $\psi(x)$ 当且仅当 x 是有穷序数。

(6) 0 已经证明，而且我们已经证明 $x = y^+$ 是 Δ_0 的，所以

$$\begin{aligned} x = 1 &\leftrightarrow \exists y \in x (y = 0 \wedge x = y^+), \\ x = 2 &\leftrightarrow \exists y \in x (y = 1 \wedge x = y^+), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x = 20 &\leftrightarrow \exists y \in x (y = 19 \wedge x = y^+)。 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

□

以上证明中，只有 ω 的绝对性需要无穷公理；而 (6) 中所有概念的绝对性不需要基础公理。另外，证明了序数、有穷序数是绝对的，则也等于验证了与之相联系的良序、有穷集合等也是绝对的。

7.7.2. **引理** 如果 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的传递模型，则 $\mathbf{M}$ 的所有有穷子集都属于 $\mathbf{M}$。

证明. 施归纳于 n，我们证明

$$\forall x \subset \mathbf{M}(|x| = n \to x \in \mathbf{M})。 \tag{7.61}$$

如果 $n=0$，则由空集的绝对性，显然有 $0 \in \mathbf{M}$。假设 $|x|=n$ 时成立，如果 $|x|=n+1$，取 $y \in x$，则 $y \in \mathbf{M}$，所以由归纳假设 $\{y\}, x-\{y\} \in \mathbf{M}$。根据前面的绝对性结果，$x = \{y\} \cup (x-\{y\})$ 属于 $\mathbf{M}$。 □

7.7.3. **定理** 以下概念对 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的任何传递模型都是绝对的：

(1) x 是有穷的；

(2) X^n；

(3) $X^{<\omega}$，即 X 上所有有穷序列的集合。

证明. (1) 令公式 $\psi(x,f)$ 为

$$f \text{ 是函数} \wedge \mathrm{dom}(f) = x \wedge \mathrm{ran}(f) \in \omega \wedge f \text{ 是一一的}, \tag{7.62}$$

则在 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 框架下，x 是有穷的当且仅当 $\exists f \psi(x,f)$。根据前面的结果，ψ 是绝对的，因此我们只需验证

$$\exists f \in \mathbf{M}\psi(x,f) \leftrightarrow \exists f \psi(x,f)。 \tag{7.63}$$

充分条件的方向是显然的。对于必要条件的方向，注意 $\psi(x,f)$ 蕴涵 f 是一个有穷集合，它的元素都是 $\mathbf{M}$ 中元素构成的有序对。由于 $\mathbf{M}$ 是对有序对封闭的，并且有序对又是对 $\mathbf{M}$ 绝对的，所以 f 的元素都属于 $\mathbf{M}$，即 f 是 $\mathbf{M}$ 的有穷子集。由引理7.7.2，$f \in \mathbf{M}$。

(2) 定义函数

$$F(X,n) = \begin{cases} 0, & \text{若 } n \notin \omega; \\ \{f \mid f \text{ 是 } n \text{ 到 } X \text{ 中的函数}\}, & \text{若} n \in \omega。 \end{cases} \tag{7.64}$$

我们只需证明 $F(X,n)$ 是绝对的。如果 $n=0$，显然；否则

$$F^{\mathbf{M}}(X,n) = \left\{f \in \mathbf{M} \mid (f \text{ 是函数} \wedge \mathrm{dom}(f) = n \wedge \mathrm{ran}(f) \subset X)^{\mathbf{M}}\right\}, \tag{7.65}$$

由已经证明的独立性结果，$F^{\mathbf{M}} = F \cap \mathbf{M}$，所以 F 是绝对的。

(3) 类似，见习题7.10.8 。

□

7.7.4. 定理 以下概念对 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的任何传递模型都是绝对的：

(1) R 是 X 上的良序；

(2) $\mathrm{type}(X,R)$。

证明. (1) 假设 $\mathbf{M}$ 是满足要求的传递模型。在引理7.5.4中我们已经证明了一个方向，所以只需证明 (R 是 X 上的良序)$^{\mathbf{M}}$ 蕴涵 "R 是 X 上的良序"。可是在 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 中可以证明任何良序集都同构于一个序数，所以如果 (R 是 X 上的良序)$^{\mathbf{M}}$，则存在 $f,\alpha\in\mathbf{M}$ 使得

$$(\alpha \text{ 是序数并且 } f \text{ 是 } \alpha \text{ 到 } (X,R) \text{ 的同构})^{M} \tag{7.66}$$

成立。而这一命题是绝对的，所以它在 $\mathbf{V}$ 中成立，这等价于 "R 是 X 上的良序"。

(2) 还记得 $\mathrm{type}(X,R)$ 是与良序集 (X,R) 同构的唯一序数，所以 (1) 的证明同时也证明了函数 $\mathrm{type}(X,R)$ 的绝对性。

□

7.7.5. 定理 以下概念对 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的任何传递模型都是绝对的：

(1) $\alpha+1$；

(2) $\alpha-1$；

(3) $\alpha+\beta$；

(4) $\alpha\cdot\beta$。

证明. (1) $\alpha+1=\alpha^{+}$;

(2) $x=\alpha-1$ 当且仅当 $\alpha\neq 0$ 并且 ((α 是后继序数并且 $\alpha=x+1$) 或者 (α 是极限序数并且 $\alpha=x$))。

(3) 和 (4) 证明类似。一种方法可以利用下面的定理 7.7.7，证明它们是以具有绝对性的性质通过超穷递归定义的，也可利用 $\alpha+\beta=\mathrm{type}(\alpha\oplus\beta)$ 和 $\alpha\cdot\beta=\mathrm{type}(\alpha\otimes\beta)$，以及函数 type 的绝对性得到，见习题7.10.8。 □

7.7.6. **真类的绝对性** 严格说，类 $\mathbf{X}$ 是一个公式 $\mathbf{X}(x)$，它对 $\mathbf{M}$ 是绝对的当且仅当 $\forall x \in \mathbf{M}(\mathbf{X}^{\mathbf{M}}(x) \leftrightarrow \mathbf{X}(x))$。直观上把它看作 $\mathbf{X} = \{x \mid \mathbf{X}(x)\}$，而类 $\mathbf{X}$ 的"相对化" $\mathbf{X}^{\mathbf{M}}$ 表示为 $\{x \in \mathbf{M} \mid \mathbf{X}^{\mathbf{M}}(x)\}$，因此 $\mathbf{X}$ 对 $\mathbf{M}$ 是绝对的当且仅当 $\mathbf{X}^{\mathbf{M}} = \mathbf{X} \cap \mathbf{M}$。例如，$\mathbf{V}(x)$ 是 $x = x$，它总是绝对的，所以 $\mathbf{V}^{\mathbf{M}}(x) = \mathbf{M}$；$\mathbf{On}(x)$ 是"x 是序数"，所以如果 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{ZF} - \mathrm{Pow}$ 的传递模型，则 $\mathbf{On}^{\mathbf{M}} = \mathbf{On} \cap \mathbf{M}$。

有些类被作为关系看待，它们有不止一个变元。这些类的绝对性也是类似的。例如，若 $\boldsymbol{R} \subseteq \mathbf{V} \times \mathbf{V}$，我们直观上把 $\boldsymbol{R}$ 看作 $\{(x,y) \mid \boldsymbol{R}(x,y)\}$，而 $\boldsymbol{R}^{\mathbf{M}} = \{(x,y) \in \mathbf{M} \times \mathbf{M} \mid \boldsymbol{R}^{\mathbf{M}}(x,y)\}$。$\boldsymbol{R}$ 对 $\mathbf{M}$ 是绝对的当且仅当 $\boldsymbol{R}^{\mathbf{M}} = \boldsymbol{R} \cap (\mathbf{M} \times \mathbf{M})$。

作为函数的类，其绝对性需要特别注意。如 $\mathbf{G} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$，它实际上意味着：$\mathbf{G}(x,y)$ 是公式，并且 $\forall x \exists! y \mathbf{G}(x,y)$，也就是说公式 $\mathbf{G}(x,y)$ 定义了一个运算。所以，只有这一公式在 $\mathbf{M}$ 中的相对化依然定义了一个运算，即 $(\forall x \exists! y \mathbf{G}(x,y))^{\mathbf{M}}$，$\mathbf{G}^{\mathbf{M}} : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ 才是一个函数。此时，$\mathbf{G}$ 相对于 $\mathbf{M}$ 是绝对的当且仅当 $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} = \mathbf{G} \restriction \mathbf{M}$。注意，$\mathbf{G}$ 作为关系的绝对性与作为函数的绝对性有很大不同。如果作为关系，$\mathbf{G}$ 是绝对的当且仅当 $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} = \mathbf{G} \cap (\mathbf{M} \times \mathbf{M})$，而作为函数，还要考虑是否有 $\mathrm{dom}(\mathbf{G}^{\mathbf{M}}) = \mathbf{M}$。

这些讨论可以使我们能够考虑以下问题：绝对性对超穷递归是保持的。

7.7.7. **定理** 令 $\boldsymbol{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上的似集合的良基关系，$\mathbf{F} : \mathbf{X} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$。令 $\mathbf{G} : \mathbf{X} \to \mathbf{V}$ 如递归定理（良基关系上，见定理7.6.6）中所定义的：

$$\forall x \in \mathbf{X}(\mathbf{G}(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{G} \restriction \mathrm{pred}(\mathbf{X}, x, \boldsymbol{R})))。 \tag{7.67}$$

令 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{ZF} - \mathrm{Pow}$ 的传递模型，并且假设：

(1) $\mathbf{F}$ 相对于 $\mathbf{M}$ 是绝对的；

(2) $\mathbf{X}, \boldsymbol{R}$ 相对于 $\mathbf{M}$ 是绝对的，$(\boldsymbol{R}$ 在 $\mathbf{X}$ 上是似集合的$)^{\mathbf{M}}$，并且

$$\forall x \in \mathbf{M}(\mathrm{pred}(\mathbf{X}, x, \boldsymbol{R}) \subseteq \mathbf{M}), \tag{7.68}$$

则 $\mathbf{G}$ 对 $\mathbf{M}$ 是绝对的。

证明. 首先注意到 $(\boldsymbol{R}$ 是 $\mathbf{X}$ 上良基的 $)^{\mathbf{M}}$，因为 $\boldsymbol{R}^{\mathbf{M}}$ 是 $\mathbf{X}^{\mathbf{M}}$ 上良基的。这样，$\mathbf{X}^{\mathbf{M}}$ 在 $\mathbf{M}$ 中的任意非空子集有 $\boldsymbol{R}^{\mathbf{M}}$-极小元。这样，我们可以在 $\mathbf{M}$ 内部应用递归定理定义 $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} : \mathbf{X}^{\mathbf{M}} \to \mathbf{M}$ 为：

$$\forall x \in \mathbf{X}^{\mathbf{M}}(\mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x) = \mathbf{F}^{\mathbf{M}}(x, \mathbf{G}^{\mathbf{M}} \restriction \mathrm{pred}^{\mathbf{M}}(\mathbf{X}^{\mathbf{M}}, x, \boldsymbol{R}^{\mathbf{M}})))。 \tag{7.69}$$

通过归纳原理可以证明 $\mathbf{G}^{\mathbf{M}} = \mathbf{G} \restriction \mathbf{X}^{\mathbf{M}}$：考虑集合

$$\{x \in \mathbf{X}^{\mathbf{M}} \mid \mathbf{G}^{\mathbf{M}}(x) \neq \mathbf{G}(x)\}$$

即可。 □

值得注意的是，如果 $\boldsymbol{R}$ 是 $\in$，而 $\mathbf{X}$ 是 $\mathbf{V}$ 或 $\mathbf{On}$，则 (2) 中的条件都是平凡成立的。

7.7.8. **定理** 以下概念对 $\mathbf{ZF} - \mathrm{Pow}$ 的任意传递模型都是绝对的：

(1) α^{β}（序数的幂运算）；

(2) $\mathrm{rank}(x)$，即 $\mathrm{rank}(x, \mathbf{V}, \in)$；

(3) $\mathrm{trcl}(x)$。

证明. 这些概念都是运用递归定义的，而定义它们只用到了绝对的性质或关系，所以它们也是绝对的。见习题7.10.8。 □

需要注意，$\mathrm{rank}(x)$ 的定义中用到了 V_{α}，但是如果 $\mathbf{M}$ 不满足幂集公理，则 $V_{\alpha}^{\mathbf{M}}$ 没有定义。不过，我们也可以把 $\mathrm{rank}(x)$ 的定义理解为递归的，在幂集公理下，这两种定义是等价的。

假设幂集公理在 $\mathbf{M}$ 中成立，则幂集运算 $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}$ 和 $V_{\alpha}^{\mathbf{M}}$ 有定义，但通常不是绝对的，除非 $\mathbf{M}$ 是绝对的。

7.7.9. **引理** 假设 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{ZF}$ 的传递模型，则

(1) 如果 $x \in \mathbf{M}$，则 $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(x) = \mathcal{P}(x) \cap \mathbf{M}$；

(2) 如果 $\alpha \in \mathbf{M}$，则 $V_{\alpha}^{\mathbf{M}} = V_{\alpha} \cap \mathbf{M}$。

证明. (1) $\mathcal{P}^{\mathbf{M}}(x) = \{y \in \mathbf{M} \mid (y \subseteq x)^{\mathbf{M}}\}$，而 $y \subseteq x$ 是绝对的。

(2) $V_{\alpha}^{\mathbf{M}} = \{x \in \mathbf{M} \mid (\mathrm{rank}(x) < \alpha)^{\mathbf{M}}\}$，同样因为刚证明了 $\mathrm{rank}(x)$ 是绝对的。

□

7.8 不可达基数与 ZFC 的模型

一般来说，V_α 不是 **ZF** 的模型，但在 7.3 节我们证明了（$\mathbf{ZF}^-$ 中）V_ω 是 **ZFC** – Inf 的模型。假设 **Z** 表示“**ZF– 替换公理**”而 **ZC** 表示“**ZFC– 替换公理**”，我们有：

7.8.1. **定理** *如果 $\gamma > \omega$ 是无穷极限序数，则在 **ZF** 中可证明 $V_\gamma \models \mathbf{Z}$；在 **ZFC** 中可证明 $V_\gamma \models \mathbf{ZC}$。*

证明. 根据 7.2 节对公理成立条件的分析，很容易验证存在公理（因为 V_γ 非空）、外延公理（因为 V_γ 传递）、基础公理（因为 $V_\gamma \subset \mathbf{WF}$）、无穷公理（因为 $\omega \in V_\gamma$）都在 V_γ 中成立。又由于 γ 是极限序数，所以对任意 $\beta < \gamma$，$\mathcal{P}(V_\beta) = V_{\beta+1} \in V_\gamma$，所以分离公理、对集公理、并集公理和幂集公理都成立。另外，如果选择公理成立，根据引理7.5.4，V_α 满足选择公理。 □

7.8.2. **练习** 证明 $V_{\omega+\omega}$ 不满足替换公理。

不过，这里有一些微妙处。虽然 **ZC** 可以证明“ω 存在”，但不能证明 V_ω 的存在，因此没有替换公理我们不能定义 V_ω。

7.8.3. **命题** *ZC 不能证明“V_ω 存在”，也不能证明“对任意集合 x，$\mathrm{trcl}(x)$ 存在”。*

证明. 见习题7.10.10。 □

如果 α“足够大”，例如不可达基数，则可以证明 V_α 是 **ZFC** 的模型。

7.8.4. **定理** *如果 κ 是不可达基数，则在 $\mathbf{ZF}^-$ 中可以证明 $V_\kappa \models \mathbf{ZF}$。在 $\mathbf{ZFC}^-$ 中可以证明 $V_\kappa \models \mathbf{ZFC}$。*

证明. $V_\kappa \models \mathbf{Z}$ 以及 $V_\kappa \models \mathbf{ZC}$ 与定理7.8.1类似。对任意 $A \in V_\kappa$，由于 κ 是不可达基数，根据引理7.2.3 (3)，$|V_\kappa| = \kappa$，所以 $|A| < \kappa$。又由于 κ 是正则的，任意 A 到 V_κ 的函数都是有界的，故对任意公式 $\psi(x,y)$，存在 $\alpha < \kappa$，使得

$$\{y \mid \exists x \in A(\psi^{V_\kappa}(x,y))\} \subseteq V_\alpha, \tag{7.70}$$

所以替换公理在 V_κ 中成立。 □

7.8.5. **推论** 在 **ZFC** 中不能证明“存在不可达基数”。

证明. 否则，我们即可在 **ZFC** 中证明存在一个不可达基数 κ，使得 V_κ 是 **ZFC** 的模型。这与哥德尔第二不完全性定理矛盾。 □

7.8.6. **引理** 假设 κ 是不可达基数，则以下概念对 V_κ 是绝对的：

(1) x 是基数；

(2) x 是正则基数；

(3) x 是不可达基数。

证明. (1) κ 是基数可用以下公式 $\varphi(x)$ 表示为：

$$x \text{ 是序数 } \wedge \forall f \forall y \in x(f \text{ 是定义在 } y \text{ 上的函数 } \rightarrow f \text{ 不是到 } x \text{ 上的满射})。 \tag{7.71}$$

而这是一个 Π_1 公式。根据引理7.4.5 (3)，$\varphi(x)$ 蕴涵 $\varphi^{V_\kappa}(x)$，所以我们只需验证另一个方向。假设 $\varphi^{V_\kappa}(x)$ 成立，但 $\varphi(x)$（在 $\mathbf{V}$ 中）不成立，则存在 $y \in x$ 和函数 f 使得 $f: x \to y$ 是满射。由于 κ 是不可达的，所以 y，f 都属于 V_κ，与 $\varphi^{V_\kappa}(x)$ 矛盾。

(2) x 是正则基数可用公式 $\varphi(x)$ 表示如下：

$$x \text{是基数} \wedge \forall f \forall y \in x(f \text{ 是定义在 } y \text{ 上的函数 } \rightarrow f \text{ 不是到 } x \text{ 上的满射})。 \tag{7.72}$$

这同样是一个 Π_1 公式，证明与 (1) 类似。

(3) x 是不可达基数可用公式 $\varphi(x)$ 表示为：

$$x \text{ 是正则基数 } \wedge \forall y \in x(y \text{ 是基数 } \rightarrow 2^y < x)。 \tag{7.73}$$

$\varphi(x)$ 同样是 Π_1 公式。我们已经验证“x 是正则基数”，“y 是基数”相对于 V_κ 是绝对的。考虑到 κ 是不可达的，所以对任意基数 $\lambda < \kappa$，$2^\lambda < \kappa$，所以 $\mathcal{P}(\lambda) \in V_\kappa$，所以 $\varphi(x)$ 对于 V_κ 是绝对的。

□

7.8.7. **引理** *如果 **ZFC** 一致，则 **ZFC** + "不存在不可达基数" 也是一致的，即*

$$\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC} + \text{"不存在不可达基数"})。 \tag{7.74}$$

证明. 如果 κ 是最小的不可达基数，则 $V_\kappa \vDash \mathbf{ZFC}+$ "不存在不可达基数"。但是，由于 **ZFC** 不能证明存在不可达基数，所以也无法定义最小的不可达基数。不过我们有以下策略：定义

$$\mathbf{M} = \bigcap \{V_\kappa \mid \kappa \text{ 是不可达基数}\}。 \tag{7.75}$$

如果存在不可达基数，则 $\mathbf{M} = V_\kappa$，其中 κ 是最小的不可达基数；如果不存在不可达基数，则 $\mathbf{M} = \mathbf{V}$。无论是哪种情况，都有 $\mathbf{M} \vDash$ **ZFC** + "不存在不可达基数"。 □

引理7.8.7蕴涵推论7.8.5，但没有使用哥德尔定理。

既然 **ZFC** 不能证明不可达基数的存在，那唯一的希望就是能在 **ZFC** 中生成 **ZFC**+ "存在不可达基数" 的模型，从而证明 "存在不可达基数" 相对于 **ZFC** 的相对一致性。不幸的是这也不能达到。

7.8.8. **推论** *在 **ZFC** 中不能生成 **ZFC**+ "存在不可达基数" 的模型，所以 Con(**ZFC**) 不蕴涵 Con(**ZFC** + "存在不可达基数")。*

证明. 反设 Con(**ZFC**) → Con(**ZFC** + "存在不可达基数")。工作于 **ZFC**+ "存在不可达基数" 中，根据定理7.8.4，我们可以证明 Con(**ZFC**)。由假设，这意味着

$$\mathbf{ZFC} + \text{"存在不可达基数"} \vdash \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC} + \text{"存在不可达基数"}), \tag{7.76}$$

与哥德尔第二不完全性定理矛盾。 □

接下来我们讨论另一类模型。

7.8.9. **定义** *对任意无穷基数 κ，$H_\kappa = \{x \mid |\mathrm{trcl}(x)| < \kappa\}$。*

H_κ 的元素称为**遗传基数小于** κ。H_ω 的元素称为**遗传有穷集**。H_{ω_1} 的元素称为**遗传可数集**。

对任意基数 κ，H_κ 都是集合，因为：

7.8.10. 引理 对任意无穷基数 κ，$H_\kappa \subseteq V_\kappa$。

证明. 任取 $x \in H_\kappa$，我们证明 $\text{rank}(x) < \kappa$。令 $t = \text{trcl}(x)$ 而 $S = \{\text{rank}(y) \mid y \in t\}$；所以，$S \subseteq \textbf{On}$。我们首先验证 S 是一个序数。令 α 是最小的不属于 S 的序数，所以 $\alpha \subseteq S$。如果 $\alpha \neq S$，令 β 为 $\min\{\gamma \in S \mid \alpha < \gamma\}$。取 t 中秩为 β 的元素 y，因为 t 是传递的，所以对任意 $z \in y$，$z \in t$，所以 $\text{rank}(z) \in S$，由 α 的定义，$\text{rank}(z) < \alpha$。这样，

$$\text{rank}(y) = \sup\{\text{rank}(z) + 1 \mid z \in y\} \leq \alpha, \tag{7.77}$$

矛盾。所以 $\alpha = S$。因为 $|t| < \kappa$，所以 $\alpha < \kappa$；又 $x \subseteq t \subseteq V_\alpha$，所以 $\text{rank}(x) \leq \alpha < \kappa$。 □

7.8.11. 引理 如果 κ 是正则的，$H_\kappa = V_\kappa$ 当且仅当 κ 是不可达的。

证明. 如果 κ 是不可达的，我们只需证明 $V_\kappa \subseteq H_\kappa$。首先，施归纳于 $\alpha < \kappa$ 可以证明

$$\forall \alpha < \kappa(|V_\alpha| < \kappa)。 \tag{7.78}$$

假设 $x \in V_\kappa$，即 $\text{rank}(x) = \alpha < \kappa$，则 $\text{trcl}(x) \subseteq V_\alpha$，而这又蕴涵 $|\text{trcl}(x)| < \kappa$，所以 $x \in H_\kappa$。

如果 κ 不是不可达的，取 $\lambda < \kappa$，使得 $2^\lambda \geq \kappa$，则 $\mathcal{P}(\lambda) \in V_\kappa - H_\kappa$。 □

以下是 H_κ 的一些基本性质：

7.8.12. 引理 对任意无穷基数 κ，

(1) H_κ 是传递的；

(2) $H_\kappa \cap \textbf{On} = \kappa$；

(3) 如果 $x \in H_\kappa$，则 $\bigcup x \in H_\kappa$；

(4) 如果 $x, y \in H_\kappa$，则 $\{x, y\} \in H_\kappa$；

(5) 如果 $x \in H_\kappa$ 而 $y \subseteq x$，则 $y \in H_\kappa$；

(6) 如果 κ 是正则的，则 $\forall x(x \in H_\kappa \leftrightarrow x \subset H_\kappa \wedge |x| < \kappa)$。

证明. (1) 如果 $x \in y$，则 $\text{trcl}(x) \subset \text{trcl}(y)$，所以 $y \in H_\kappa$ 蕴涵 $x \in H_\kappa$。

(2)　由于 $\alpha = \mathrm{trcl}(\alpha)$，所以 $\alpha < \kappa$ 当且仅当 $\alpha \in H_\kappa$。

(3)　$\mathrm{trcl}(\bigcup x) \subseteq \mathrm{trcl}(x)$，所以命题成立。

(4)　$\mathrm{trcl}(\{x, y\}) \subseteq \mathrm{trcl}(x) \cup \mathrm{trcl}(y)$，而 $|\mathrm{trcl}(x) \cup \mathrm{trcl}(y)| < \kappa$。

(5)　如果 $y \subseteq x$，则 $\mathrm{trcl}(y) \subseteq \mathrm{trcl}(x)$，同（1）。

(6)　由引理7.2.13 (3)，$\mathrm{trcl}(x) = x \cup \bigcup\{\mathrm{trcl}(y) \mid y \in x\}$，如果 $x \subset H_\kappa$ 并且 $|x| < \kappa$，则 $\mathrm{trcl}(x)$ 是少于 κ 个基数小于 κ 的集合的并，考虑到 κ 是正则的，由选择公理，$|\mathrm{trcl}(x)| < \kappa$。 □

在 **ZFC** 中可以证明（定理7.8.1）：如果 $\alpha > \omega$ 是极限序数，则 $V_\alpha \models \mathbf{ZC}$。类似地，如果 $\kappa > \omega$ 是正则基数，则 $H_\kappa \models \mathbf{ZFC} - \mathrm{Pow}$。

7.8.13. **定理** *如果 κ 是不可数正则基数，则 H_κ 是 $\mathbf{ZFC} - \mathrm{Pow}$ 的模型。*

证明. 外延公理（H_κ 是传递的）和基础公理（$H_\kappa \subseteq V_\kappa$）显然成立。比照 V_ω 和 **WF** 的情况，应用引理7.8.12，可以验证除无穷公理和选择公理以外的公理：(3) 证明并集公理在 H_κ 中为真，(4) 证明对集公理，(5) 证明分离公理模式，而 (6) 则证明替换公理在 H_κ 中为真。

对于选择公理，由于良序对 H_κ 是绝对的，所以我们只需证明：

$$\forall X \in H_\kappa \exists R \in H_\kappa (R \text{ 是 } X \text{ 上的良序})。 \tag{7.79}$$

注意，我们工作于 **ZFC** 中，所以这里假定了选择公理在 **V** 中成立。任取 $X \in H_\kappa$，$R \subseteq X \times X$ 是其上的良序，则由引理 7.8.12的（4），$R \subseteq H_\kappa$，再由引理7.8.12的（6），$R \in H_\kappa$。

最后，无穷公理成立是因为 $\omega \in H_\kappa$。 □

7.8.14. **定理** *如果 κ 是不可数正则基数，以下命题等价：*

(1)　*H_κ 满足 **ZFC**；*

(2)　*$H_\kappa = V_\kappa$；*

(3)　*κ 是不可达的。*

证明. 引理7.8.11证明了（2）当且仅当（3）。我们以下证明（1）当且仅当（2），如果 $H_\kappa = V_\kappa$，则由定理7.8.4，$H_\kappa \models \mathbf{ZFC}$；如果 $H_\kappa \neq V_\kappa$，则 κ 不是不可达的，所以存在 $\lambda < \kappa$，$2^\lambda \geq \kappa$，即 $\lambda \in H_\kappa$ 但是 $\mathcal{P}(\lambda) \notin H_\kappa$，幂集公理在 H_κ 中不成立。 □

以上定理表明，如果 κ 是不可达基数，则 $H_\kappa = V_\kappa$，本节所有关于 V_κ 的结果都对 H_κ 成立。例如，我们同样可以使用 H_κ 证明在 **ZFC** 内不能证明“存在不可达基数”，也不能证明“存在不可达基数”的相对一致性。

如果正则基数 κ 不是不可达基数，则在 **ZFC** 内可以证明

$$H_\kappa \models \mathbf{ZFC} - \mathrm{Pow} + \neg\mathrm{Pow}, \tag{7.80}$$

所以，我们有

$$\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC} - \mathrm{Pow} + \neg\mathrm{Pow})。$$

所以，幂集公理不能由 **ZFC** 的其他公理推出。如果令 $\kappa = \omega_1$，我们有以下更强的命题：

7.8.15. **推论** $\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC} - \mathrm{Pow} + \forall x(x\ \text{是可数的}))$。

证明. 在 **ZFC** 中，定义 $\mathbf{ZFC} - \mathrm{Pow}$ 的模型 H_{ω_1}，如果 $x \in H_{\omega_1}$，则 x 是可数的。并且任何由 ω 到 x 上的函数都在 H_{ω_1} 中，所以 $(x\ \text{是可数的})^{H_{\omega_1}}$。 □

7.9 反映定理

上一节的讨论表明，除非 α 是不可达基数，否则 V_α 不能“反映” $\mathbf{V}$ 的全貌：对任意这样的 V_α，总有一些在 $\mathbf{V}$ 中成立的性质在 V_α 中不成立。例如，无穷公理在 V_ω 中不成立，$V_{\omega+\omega}$ 不满足替换公理，等等。H_κ 的情况也一样。

本节则是要讨论另一个方向：对任意具体的性质 φ，如果 φ 在 $\mathbf{V}$ 中成立，是否总能找到某个 V_α 满足 φ 呢？反过来问也许更能表现这个问题的意义：是否有一个性质 φ，它在 $\mathbf{V}$ 中成立，但在所有 V_α 中都不成立呢？反映定理对此给出了否定回答：如果 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是有穷多个关于 $\mathbf{V}$ 性质，则总存在足够大的 V_α 使得这些性质在 V_α 中成立。此时我们说**关于 $\mathbf{V}$ 的性质 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 反映在 V_α 中**。

这个定理与洛文海姆 -司寇伦定理（7.1.10）密切相关。回忆初等子模型的概念（定义7.1.5），事实上我们可以对“任意公式”加以限制。例如，如果 $M \subseteq N$ 都是集合论模型，并且对任意 Σ_1 公式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$，任意

$a_1, \cdots, a_n \in M$，都有 $M \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$ 当且仅当 $N \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，则称 M 是的 N 的Σ_1-**初等子模型**，记作 $M \prec_{\Sigma_1} N$。

类似地，如果 F 是集合论语言的公式集，并且对任意 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) \in F$，任意 $a_1, \cdots, a_n \in M$，都有 $M \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$ 当且仅当 $N \models \varphi[a_1, \cdots, a_n]$，则称 M 是的 N 的**相对于 F 的初等子模型**，则记作 $M \prec_F N$。

利用这些术语，反映定理则可表述为，对任意有穷的集合论公式集 F，总存在 V_α 使得 $V_\alpha \prec_F \mathbf{V}$。如果还假设选择公理，则可以进一步证明存在可数的 M 使得 $M \prec_F \mathbf{V}$。

当然，利用绝对性的概念，反映定理还可表述为：对任意有穷的公式集 $F = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$，总存在 V_α 使得 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 相对于 V_α 是绝对的。

以下引理是引理 7.1.7的“集合论版本”，证明也完全相似。

7.9.1. **引理**　令 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ 皆是类，$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是对子公式封闭的序列，即，序列中每一公式的子公式也在这个序列中，则以下命题等价：

(1)　$\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 相对于 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 绝对；

(2)　如果 φ_i 是形如 $\exists x \varphi_j(x, y_1, \cdots, y_m)$ 的公式，则

$$\begin{aligned} \forall y_1, \cdots, y_m \in \mathbf{M}(\exists x \in \mathbf{N}\varphi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \cdots, y_m) \to \\ \exists x \in \mathbf{M}\varphi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \cdots, y_m))。\end{aligned} \tag{7.81}$$

证明. 取定 $y_1, \cdots, y_m \in \mathbf{M}$，假设 $\exists x \in \mathbf{N}\varphi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \cdots, y_m)$，而这正是 $\varphi_i^{\mathbf{N}}$，由 φ_i 的绝对性，它等价于 $\varphi_i^{\mathbf{M}}$，此即 $\exists x \in \mathbf{M}\varphi_j^{\mathbf{M}}(x, y_1, \cdots, y_m)$，根据题设，$\varphi_j$ 属于公式序列，所以也是绝对的，所以，以上公式等价于 $\exists x \in \mathbf{M}\varphi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \cdots, y_m)$。

下面我们用归纳法证明 φ_i 的绝对性。假设我们已经证明 φ_i 的所有子公式是相对于 $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ 绝对的。如果 φ_i 是原子公式或 $\neg\psi_j$ 或 $\psi_j \to \psi_k$，结果显然成立。

假设 φ_i 形如 $\exists x \varphi_j(x, y_1, \cdots, y_m)$，先证容易的方向。如果对任意 $y_1, \cdots, y_m \in \mathbf{M}$，$\exists x \in \mathbf{M}\varphi_j^{\mathbf{M}}(x, y_1, \cdots, y_m)$，则因为 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$，以及 φ_j 是绝对的，我们有 $\exists x \in \mathbf{N}\varphi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \cdots, y_m)$。

反过来，假设 $\exists x \in \mathbf{N}\varphi_j^{\mathbf{N}}(x, y_1, \cdots, y_m)$，由题设和 φ_j 的绝对性，结果立得。 □

7.9.2. **反映定理** (**ZF**) *对任意有穷公式集* $F=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$*，对任意* V_α*，存在* V_β *满足* $V_\alpha\subseteq V_\beta$ *并且* $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ *相对于* V_β *是绝对的。*

证明. 我们将应用引理7.9.1。不妨假设 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是对子公式封闭的。

对 F 中每一形如 $\exists x\varphi_j(x,y_1,\cdots,y_m)$ 的公式 φ_i，对任意 $y_1,\cdots,y_m$，令 $\mathbf{U}_i=\{x\mid\varphi_j^{\mathbf{V}}(x,y_1,\cdots,y_m)\}$，注意，$\mathbf{U}_i$ 不一定是集合。由此我们定义函数 $\mathbf{h}_{\varphi_i}:\mathbf{V}^m\to\mathbf{V}$ 为：$\mathbf{h}_{\varphi_i}(y_1,\cdots,y_m)=V_\xi$，其中 V_ξ 是使 $\mathbf{U}_i\cap V_\xi\neq\emptyset$ 的最小的 V_ξ。如果 $\exists x\varphi_j(x,y_1,\cdots,y_m)$ 在 $\mathbf{V}$ 中不成立，即 $\mathbf{U}_i=\emptyset$，则令 $\mathbf{h}_{\varphi_i}(y_1,\cdots,y_m)=V_0$。注意到 $\mathbf{h}_{\varphi_i}$ 满足：对任意 $y_1,\cdots,y_m$，如果 $\exists x\varphi_j(x,y_1,\cdots,y_m)$，则 $\exists x\in\mathbf{h}_{\varphi_i}(y_1,\cdots,y_m)\varphi_j(x,y_1,\cdots,y_m)$。所以函数 $\mathbf{h}_{\varphi_i}$ 相当于洛文海姆 -司寇伦定理中的司寇伦函数。

接下来定义

$$\mathbf{h}_F(y_1,\cdots,y_m)=\bigcup\{\mathbf{h}_{\varphi_i}(y_1,\cdots,y_m)\mid\varphi_i\in F\}\,,\tag{7.82}$$

则 $\mathbf{h}_F$ 等于某个 V_γ，并且满足对 F 中每一形如 $\exists x\varphi_j(x,y_1,\cdots,y_m)$ 的公式 $\varphi_i\in F$，对任意 $y_1,\cdots,y_m$，如果 $\exists x\varphi_j(x,y_1,\cdots,y_m)$，则 $\exists x\in\mathbf{h}_F(y_1,\cdots,y_m)\varphi_j(x,y_1,\cdots,y_m)$。

现在取定任一 V_α，递归定义 V_α^i，$i\in\omega$ 如下：

(1) $V_\alpha^0=V_\alpha$；

(2) $V_\alpha^{i+1}=V_\alpha^i\cup\bigcup\{\mathbf{h}_F(y_1,\cdots,y_m)\mid y_1,\cdots,y_m\in V_\alpha^i\}$；

(3) 最后，令 $V_\beta=\bigcup_{i\in\omega}V_\alpha^i$。

注意到，V_β 相当于 V_α 的（相对于 F 中公式的）司寇伦壳。

显然，β 是极限序数，并且大于等于 α。最后我们证明：任意 F 中的公式 φ_i 都对 V_β 是绝对的。

首先，原子公式对任意传递模型都是绝对的。其次，如果 φ_i 形如 $\exists x\varphi_j(x,y_1,\cdots,y_m)$，则对任意 $y_1,\cdots,y_m\in V_\beta$，如果 $\exists x\in\mathbf{V}\varphi_j(x,y_1,\cdots,y_m)$，则 $\exists x\in V_\beta\varphi_j(x,y_1,\cdots,y_m)$。由引理 7.9.1，$\varphi$ 对 V_β 绝对。 □

定理7.9.2中的 φ_i 可以为语句，所以

7.9.3. 推论 （**ZF**）令 $F = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$ 为 **ZF** 公理的有穷子集，则

$$\forall\alpha\exists\beta > \alpha(\sigma_1^{V_\beta} \wedge \cdots \wedge \sigma_n^{V_\beta})。 \tag{7.83}$$

证明. 由定理7.9.2，我们可以证明，对任意 $\sigma_i \in F$，对任意 α，存在 $\beta > \alpha$ 使得 $\sigma_i^{V_\beta}$ 当且仅当 σ_i。又由于 σ_i 是 **ZF** 的公理，所以 $\mathbf{ZF} \vdash \sigma_i^{V_\beta}$。 □

反映定理的的另一个推论是 **ZF**，**ZFC** 都是不能有穷可公理化的。

7.9.4. 推论 令 $F = \{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$ 为 **ZF** 公理的有穷子集，除非 **ZF** 是不一致的，否则 F 不能证明 **ZF** 的所有公理。

证明. 由推论7.9.3，我们在 **ZF** 内可以证明 F 存在一个模型 V_β。反设 F 可以证明 **ZF** 的所有公理，则 V_β 是 **ZF** 的模型。这样，我们就在 **ZF** 中证明了存在 **ZF** 的模型，与哥德尔第二不完全性定理矛盾。 □

7.9.5. 注 推论7.9.4对 **ZF** 的扩张也成立，例如 **ZFC**。

本节一开始就提到，假设选择公理成立，我们可以把反映定理 7.9.2加强为：存在一个可数的模型 M，F 对于 M 是绝对的。不过，此时 M 不能是 V_β，因为只有 V_ω 是可数的。M 也不能是传递的，因为幂集运算对可数传递模型不是绝对的。

7.9.6. 定理（**ZFC**）对任意有穷公式集 $F = \{\varphi_1, \cdots, \varphi_n\}$，对任意集合 N，存在集合 M 使得

(1) $N \subseteq M$；

(2) $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 相对于 $(M, \in)$ 是绝对的；

(3) $|M| \leq |N| \cdot \omega$；

(4) 特别地，如果 N 是至多可数的，则 M 是可数的。

证明. 与洛文海姆 -司寇伦定理7.1.10和反映定理7.9.2相似，不妨假设 F 是对子公式封闭的。

利用选择公理，对 F 中每一形如 $\exists x\varphi_j(x,y_1,\cdots,y_m)$ 的公式 φ_i，对任意 $y_1,\cdots,y_m$，分别定义 φ_i 的司寇伦函数 $\mathbf{h}_{\varphi_i}(y_1,\cdots,y_m)$。（反映定理的证明之所以可避免选择公理，是因为我们利用了序数上的良序。）假设 $\mathcal{H}_F$ 为这些司寇伦函数的集合，而 $M=\mathcal{H}_F(N)$ 为 N 的相对于 F 的司寇伦壳，则对每一 $\varphi_i\in F$，都有 φ 是相对于 $(M,\in)$ 绝对的。而且，不难看出 $|M|\leq|N|\cdot|\mathcal{L}|\cdot\omega$。由于集合论语言 $\mathcal{L}$ 是可数的，因此 $|M|\leq|N|\cdot\omega$。 □

虽然可数模型 M 不是传递的，但利用莫斯托夫斯基坍塌定理7.6.15，我们可以找到与其同构的传递模型。

接下来我们对定理7.9.6中的 M 应用莫斯托夫斯基坍塌定理，从而得到一个可数传递模型。

7.9.7. **推论** （**ZFC**）*对任意有穷公式集 $F=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$，对任意传递集合 N，存在 M 满足：*

（1） $N\subseteq M$；

（2） $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$ *相对于* $(M,\in)$ *是绝对的*；

（3） $|M|\leq|N|\cdot\omega$；

（4） *特别地，如果 N 是至多可数的，则 M 是可数的*；

（5） *M 是传递的。*

证明. 不妨假设外延公理属于 F。定理7.9.6使我们得到满足（1）–（4）的模型 $(M',\in)$，而且 $\in$ 在 M' 上是似集合的、良基的。又由于外延公理在 $\mathbf{V}$ 中成立，所以在 $(M',\in)$ 中也成立，即 $(M',\in)$ 是外延的。这就表明 $(M',\in)$ 满足莫斯托夫斯基定理7.6.15的所有条件，所以存在传递模型 M 使得 $G:M'\to M$ 是同构。根据同构的性质，不难看出 M 满足（2）–（5）。

为证明（1），注意到对任意 $x\in N$，$G(x)=\{G(y)\mid y\in N\wedge y\in x\}$。由于 N 是传递的，所以 $G(x)=\{G(y)\mid y\in x\}=x$，即 $N\subseteq M$。 □

7.10 习题

7.10.1. 证明引理7.1.9，即，令 N 是集合论模型，S 是 N 的子集，如果 $M=\mathcal{H}(S)$ 是 S 的司寇伦壳，则 $M\prec N$。

7.10.2. 对任意集合 $x \in \mathbf{WF}$，如果 $\operatorname{rank}(x)=\alpha$，则 $x \subseteq V_\alpha$，$x \notin V_\alpha$，并且对任意 $\gamma > \alpha$，$x \in V_\gamma$。

7.10.3. 证明引理7.2.5，即

(1) $V_\alpha = \{x \in \mathbf{WF} \mid \operatorname{rank}(x) < \alpha\}$；

(2) $\mathbf{WF}$ 是传递的，即，对任意 $y \in \mathbf{WF}$，如果 $x \in y$，则 $x \in \mathbf{WF}$；

(3) 对任意 $x, y \in \mathbf{WF}$，如果 $x \in y$，则 $\operatorname{rank}(x) < \operatorname{rank}(y)$；

(4) 对任意 $y \in \mathbf{WF}$，$\operatorname{rank}(y) = \sup\{\operatorname{rank}(x)+1 \mid x \in y\}$。

7.10.4. 证明引理7.2.7，即

(1) 假设 $x \in \mathbf{WF}$，则 $\bigcup x$，$\mathcal{P}(x)$ 以及 $\{x\}$ 属于 $\mathbf{WF}$，并且它们的秩都小于 $\operatorname{rank}(x)+\omega$；

(2) 如果 $x, y \in \mathbf{WF}$，则 $x \times y$，$x \cup y$，$x \cap y$，$\{x, y\}$，(x, y)，x^y 都属于 $\mathbf{WF}$，并且它们的秩都小于 $\operatorname{rank}(x)+\operatorname{rank}(y)+\omega$；

(3) 整数 $\mathbb{Z}$，有理数 $\mathbb{Q}$ 和实数 $\mathbb{R}$ 都属于 $V_{\omega+\omega}$；

(4) 对任意集合 x，$x \in \mathbf{WF}$ 当且仅当 $x \subset \mathbf{WF}$。

7.10.5. 证明：对任意拓扑空间 T，存在 $\mathbf{WF}$ 中的拓扑空间 T' 与 T 同胚。

7.10.6. 证明引理7.4.5：令 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$ 皆为传递的，$\psi(x_0, \ldots, x_n)$ 为集合论语言的公式，则

(1) 如果 ψ 是 Δ_0 公式，则它对于 $\mathbf{M}, \mathbf{N}$ 是绝对的；

(2) 如果 ψ 是 Σ_1 公式，则

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n(\psi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \psi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n));$$

(3) 如果 ψ 是 Π_1 公式，则

$$\forall x_1 \cdots \forall x_n(\psi^{\mathbf{N}}(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \psi^{\mathbf{M}}(x_1, \ldots, x_n))。$$

7.10.7. 证明莫斯托夫斯基定理中的 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{G}$ 都是唯一的。

7.10.8. 证明以下概念对任意 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的传递模型是绝对的:

(1) $X^{<\omega}$，即 X 上所有有穷序列的集合;

(2) $\alpha+\beta$;

(3) $\alpha\cdot\beta$;

(4) α^β (序数的幂运算);

(5) $\mathrm{rank}(x)$，即 $\mathrm{rank}(x,\mathbf{V},\in)$;

(6) $\mathrm{trcl}(x)$。

7.10.9. 证明 $V_\omega\models\mathbf{ZF}-\mathrm{Inf}+\neg\mathrm{Inf}$。

7.10.10. 证明命题7.8.3，即 $\mathbf{ZC}$ 不能证明"V_ω 存在"; $\mathbf{ZC}$ 不能证明"对任意 x，$\mathrm{trcl}(x)$ 存在"。[提示：找到一个模型 N 使得 $N\models\mathbf{ZC}$ 但是 $V_\omega\notin N$。对于 $\mathrm{trcl}(x)$ 也类似。]

7.10.11. 对任意基数 $\kappa>\omega$，$H_\kappa\models\mathbf{Z}-\mathrm{Pow}$。

7.10.12. 证明"R 是良基的"对 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的所有传递模型是绝对的。

7.10.13. 如果把 $(\mathbf{On},\in)$ 看作一个结构，请问 $\mathbf{ZFC}$ 的哪些公理在其中成立？哪些不成立？

7.10.14. 证明在 $V_{\omega+\omega}$ 中，替换公理不成立，所以命题"每一良序集同构于一个序数"不成立。

7.10.15. 令 $X\in\mathbf{WF}$，则 X 是可良序化的当且仅当 $(X\text{ 是可良序化的})^{\mathbf{WF}}$，由此证明 $\mathbf{AC}$ 蕴涵 $(\mathbf{AC})^{\mathbf{WF}}$，及 $\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}^-)\to\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC})$。

7.10.16. 假设 $F=\{\varphi_1,\cdots,\varphi_n\}$ 是 $\mathbf{ZF}$ 公理的有穷子集，并且 F 可以推出 $\mathbf{ZF}$ 的所有公理。同时假设 β 是使得 V_β 满足 F 的最小的 β。证明：$\mathbf{ZF}$ 的定理"存在 α 使得 $V_\alpha\models F$"在 V_β 中不成立，所以第一个满足 F 的 V_β 不是 $\mathbf{ZF}$ 模型。这给出了推论7.9.4 的另一个证明。[注意，你需要用引理7.7.9证明 V_α 对 V_β 是绝对的。]

7.10.17. 假设 $\mathbf{U} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} U_\alpha$ 是类，并且满足以下条件

(1) 对每一 α，U_α 是集合；

(2) 如果 $\alpha < \beta$，则 $U_\alpha \subset U_\beta$；

(3) 如果 γ 是极限序数，$U_\beta = \bigcup_{\alpha < \gamma} U_\alpha$。

如果用 $\mathbf{U}$ 代替 $\mathbf{V}$，U_α 代替 V_α，证明反映定理依然成立。

7.10.18. 对任意公式 φ，存在序数的无界闭集 C_φ，使得对任意 $\alpha \in C_\varphi$，V_α 反映 φ，即 φ 对 V_α 是绝对的。

7.10.19. 假设 $\mathbf{M}$ 是集合论的传递模型，则

(1) 如果 $M \vDash |X| < |Y|$，则 $|X| < |Y|$；

(2) 如果 $\alpha \in M$ 并且 α 是基数，则 $(\alpha$ 是基数 $)^M$。

第八章　可构成集

加入公理 A（$\mathbf{V}=\mathbf{L}$）似乎是对集合论公理的一个自然的完备化，因为它以一种确定无疑的方式决定了任意无穷这一模糊概念。

库尔特·哥德尔

前面已经多次提到，康托的连续统假设是推动集合论发展的主要动力。本章将讨论可构成集的类 $\mathbf{L}$，哥德尔用此得出连续统假设的否定不能在 **ZFC** 中证明。

8.1 可定义性与哥德尔运算

8.1.1. **定义** 令 M 是集合，$\psi(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)$ 是公式，称 $X\subseteq M^n$ 是**相对于 M 由 ψ 通过参数可定义的** 当且仅当存在 $y_1,\cdots,y_m\in M$，使得

$$X=\left\{(x_1,\cdots,x_n)\mid(\psi^M(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m))\right\}。\tag{8.1}$$

为了构造哥德尔的 $\mathbf{L}$，我们必须使用

M 的所有相对于 M 通过参数可定义的子集

这一概念，通常记作 $\mathrm{Def}(M)$，即：

$$\begin{aligned}\mathrm{Def}(M)=\{X\subseteq M\mid &\text{存在公式 }\psi,\\ &X\text{ 相对于 }M\text{ 由 }\psi\text{ 通过参数可定义}\}。\end{aligned}\tag{8.2}$$

接下来我们就讨论如何用集合论的形式语言刻画函数 Def(M)，并且证明它对 **ZF** 的传递模型是绝对的。

我们这里采用的方法是哥德尔最初使用的办法，对于没有数理逻辑背景的读者更容易理解一些。这一方法的主要思想是：首先注意到对任意集合 M，任意公式 ψ，ψ^M 是 Δ_0 公式，这就意味着由它生成的子集 $Y=\{x\in M \mid \psi^M(x)\}$ 可以由一系列基本的运算及其复合得到，而这些运算本身相对于传递模型都是绝对的。

8.1.2. **定义** 以下运算称为**哥德尔运算**：

$$
\begin{aligned}
G_1(X,Y)&=\{X,Y\};\\
G_2(X,Y)&=X\times Y;\\
G_3(X,Y)&=\ \in\restriction X\times Y=\{(u,v)\mid u\in X\wedge v\in Y\wedge u\in v\};\\
G_4(X,Y)&=X-Y;\\
G_5(X,Y)&=X\cap Y;\\
G_6(X,Y)&=\bigcap X;\\
G_7(X,Y)&=\mathrm{dom}(X);\\
G_8(X,Y)&=\{(x,y)\mid (y,x)\in X\};\\
G_9(X,Y)&=\{(x,y,z)\mid (x,z,y)\in X\};\\
G_{10}(X,Y)&=\{(x,y,z)\mid (y,z,x)\in X\}。
\end{aligned}
$$

称类 C 是**对于哥德尔运算封闭的**，如果对任意 X,Y，$X,Y\in C$ 蕴涵 $G_i(X,Y)\in C$，其中 $1\le i\le 10$。对任意集合 M，$\mathrm{cl}_G(M)$ 表示 M 的**哥德尔闭包**，即包含 M 并且对哥德尔运算封闭的最小集合。

8.1.3. **定义** 满足以下条件的公式 ψ 称为**范式**：

(1) ψ 中的逻辑符号只有 $\neg,\wedge$ 和 $\exists$；

(2) $=$ 不出现于 ψ 中；

(3) 如果 $x_i\in x_j$ 出现于 ψ 中，则 $i\neq j$；

(4) $\exists$ 只以这样的形式出现：$\exists x_{m+1}\in x_i\varphi(x_1,\cdots,x_{m+1})$，其中 $1\le i\le m$。

8.1.4. **引理** 每一 Δ_0 公式都可改写成范式，即，对任意 Δ_0 公式 ψ，存在范式 ψ'，使得对任意包含外延公理的语句集 Σ，$\Sigma \vdash \psi \leftrightarrow \psi'$。

证明. 对于 (1)，$\psi \to \varphi$ 逻辑等值于 $\neg(\psi \wedge \neg\varphi)$，$\psi \vee \varphi$ 逻辑等值于 $\neg(\neg\psi \wedge \neg\varphi)$，$\forall x\varphi$ 逻辑等值于 $\neg\exists x\neg\varphi$。同样，通过更换约束变元的下标，可以满足 (4) 的要求。如果出现 $x_i \in x_i$，则将其替换为 $\exists x_k \in x_i(x_k = x_i)$，其中 k 足够大，这样 (3) 也可满足。这些都是只用纯逻辑的方法即可得到。对于 (2)，如果 $x_i = x_j$ 出现，则根据外延公理，将其替换为 $\forall x \in x_i(x \in x_j) \wedge \forall y \in x_j(y \in x_i)$。 □

8.1.5. **定理** 对任意 Δ_0 公式 $\psi(x_1, \cdots, x_n)$，存在函数 G，G 是哥德尔运算的复合，并且对任意 $X_1, \cdots, X_n$，

$$G(X_1, \cdots, X_n) = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n \wedge \psi(x_1, \cdots, x_n)\}。$$

证明. 由引理8.1.4，不妨假设 ψ 是范式。我们对 ψ 的复杂度做归纳。

(1)　$\psi(x_1, \cdots, x_n)$ 是原子公式。此时 ψ 形如 $x_i \in x_j$，$i \neq j$。我们再对 n 用归纳法证明。

(a) 如果 $n = 2$，则 $\psi(x_1, x_2)$ 就是 $x_1 \in x_2$ 或 $x_2 \in x_1$。如果是前者，令 $G = G_3$，则

$$G(X_1, X_2) = G_3(X_1, X_2) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in X_2 \wedge x_1 \in x_2\}。$$

如果是后者，令 $G(X_1, X_2) = G_8(G_3(X_2, X_1), X_2)$，则有

$$G(X_1, X_2) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in X_1 \wedge x_2 \in X_2 \wedge x_2 \in x_1\}。$$

(b) 假设 $n > 2$ 并且 $i, j \neq n$。由归纳假设，存在 G' 使得

$$G'(X_1, \cdots, X_{n-1}) = \{(x_1, \cdots, x_{n-1}) \mid x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_{n-1} \in X_{n-1} \wedge x_i \in x_j\}。$$

令 $G(X_1, \cdots, X_n) = G_2(G'(X_1, \cdots, X_{n-1}), X_n)$，则

$$\begin{aligned} G(X_1, \cdots, X_n) &= G'(X_1, \cdots, X_{n-1}) \times X_n \\ &= \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \cdots \wedge x_n \in X_n \wedge x_i \in x_j\}。\end{aligned}$$

(c) 假设 $n>2$ 并且 $i,j\neq n-1$。由 1 (b)，存在 G' 满足

$$G'(X_1,\cdots,X_n)=\{(x_1,\cdots,x_n,x_{n-1})\mid\\ x_1\in X_1\wedge\cdots\wedge x_n\in X_n\wedge x_i\in x_j\}。$$

注意到

$$(x_1,\cdots,x_n,x_{n-1})=((x_1,\cdots,x_{n-2}),x_n,x_{n-1}),$$

取 $G(X_1,\cdots,X_n)=G_9(G'(X_1,\cdots,X_n),X_{n-1})$，则

$$G(X_1,\cdots,X_n)=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1\in X_1\wedge\cdots\wedge x_n\in X_n\wedge x_i\in x_j\}。$$

(d) 假设 $n>2$ 并且 $i=n-1,j=n$。根据 1 (a)，

$$G_3(X_{n-1},X_n)=\{(x_{n-1},x_n)\mid x_{n-1}\in X_{n-1}\wedge x_n\in X_n\wedge x_{n-1}\in x_n\}。$$

反复使用 G_2，我们得到 G'，使得

$$\begin{aligned}G'(X_1,\cdots,X_n)&=G_3(X_{n-1},X_n)\times(X_1\times\cdots\times X_{n-2})\\&=\{((x_{n-1},x_n),(x_1,\cdots,x_{n-2}))\mid\\&\quad x_1\in X_1\wedge\cdots\wedge x_n\in X_n\wedge x_{n-1}\in x_n\}。\end{aligned}$$

注意到

$$((x_{n-1},x_n),(x_1,\cdots,x_{n-2}))=(x_{n-1},x_n,(x_1,\cdots,x_{n-2})),$$

而

$$(x_1,\cdots,x_n)=((x_1,\cdots,x_{n-2}),x_{n-1},x_n)。$$

令 $G(X_1,\cdots,X_n)=G_{10}(G'(X_1,\cdots,X_n),X_1)$，则

$$G(X_1,\cdots,X_n)=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1\in X_1\wedge\cdots\wedge x_n\in X_n\wedge x_{n-1}\in x_n\}。$$

(e) 假设 $n>2$ 并且 $i=n,j=n-1$。此种情况与 1 (d) 完全类似。

(2) $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\neg\varphi(x_1,\cdots,x_n)$。根据归纳假设，已经有运算 $G'(X_1,\cdots,X_n)$ 满足

$$G'(X_1,\cdots,X_n)=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid\\ x_1\in X_1\wedge\cdots\wedge x_n\in X_n\wedge\varphi(x_1,\cdots,x_n)\}。$$

令 $G(X_1,\cdots,X_n)=G_4(X_1\times\cdots\times X_n,G'(X_1,\cdots,X_n))$，则

$$G(X_1,\cdots,X_n)=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid x_1\in X_1\wedge\cdots x_n\in X_n\wedge\psi(x_1,\cdots,x_n)\}。$$

(3)　$\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 是 $\varphi_1(x_1,\cdots,x_n)\wedge\varphi_2(x_1,\cdots,x_n)$。由归纳假设，令 G' 和 G'' 分别是与 φ_1,φ_2 相对应的函数，取

$$G(X_1,\cdots,X_n)=G_5(G'(X_1,\cdots,X_n),G''(X_1,\cdots,X_n)),$$

即可满足要求。

(4)　$\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 是公式 $\exists x_{n+1}\in x_i\varphi(x_1,\cdots,x_{n+1})$。根据归纳假设，令 $G''(X_1,\cdots,X_{n+1})$ 是与 φ 对应的函数。如果

$$\varphi'(x_1,\cdots,x_{n+1})=\varphi(x_1,\cdots,x_{n+1})\wedge x_{n+1}\in x_i,$$

则不难找到 $G'(X_1,\cdots X_n)$ 是与 φ' 对应的函数。如果令

$$\begin{aligned}G(X_1,\cdots,X_n)&=(X_1\times\cdots\times X_n)\cap\operatorname{dom}(G'(X_1,\cdots,X_n,\bigcup X_i))\\&=G_5((X_1\times\cdots\times X_n),G_7(G'(X_1,\cdots,X_n,G_6(X_i)),X_1),\end{aligned}$$

我们证明

$$\begin{aligned}G(X_1,\cdots,X_n)=\{&(x_1,\cdots,x_n)\mid\\&x_1\in X_1\wedge\cdots\wedge x_n\in X_n\wedge\psi(x_1,\cdots,x_n)\}。\end{aligned}$$

由于 $(x_1,\cdots,x_n)\in X_1\times\cdots\times X_n$，所以我们只需证明 $\psi(x_1,\cdots,x_n)$ 当且仅当

$$\begin{aligned}(x_1,\cdots,x_n)\in\operatorname{dom}\{&(x_1,\cdots,x_n,x_{n+1})\mid x_1\in X_1\wedge\cdots\wedge\\&x_n\in X_n\wedge x_{n+1}\in\bigcup X_i\wedge\varphi'(x_1,\cdots,x_{n+1})\},\end{aligned}$$

而上式等价于

$$\exists x_{n+1}(x_{n+1}\in x_i\wedge\varphi(x_1,\cdots,x_{n+1})\wedge x_{n+1}\in\bigcup X_i)。$$

注意到 $x_{n+1}\in x_i$ 蕴涵 $x_{n+1}\in\bigcup X_i$，所以上式又等价于

$$\exists x_{n+1}\in x_i\varphi(x_1,\cdots,x_{n+1}),$$

而这就是 ψ。 □

8.1.6. **推论**　*如果 M 是传递的并且 $\mathrm{cl}_G(M)=M$，则对任意 Δ_0 公式 $\psi(x,y_1,\cdots,y_m)$，任意集合 $X\in M$，任意 $y_1,\cdots,y_m\in M$，如果*

$$Y=\{x\in X\mid\psi(x,y_1,\cdots,y_m)\},$$

则 $Y\in M$。也就是说 Δ_0 分离公理模式在 M 中为真。

证明. 根据定理8.1.5，存在哥德尔运算的复合 G，使得

$$\begin{aligned} &G(X, \{y_1\}, \cdots, \{y_m\}) = \\ &\quad \{(x, y_1, \cdots, y_m) \mid x \in X \wedge \psi(x, y_1, \cdots, y_m)\}。\end{aligned} \tag{8.3}$$

如果 $m = 1$，容易看出 $Y = \mathrm{dom}(G) = G_7(G)$，而一般情况则可多次应用 G_7 得到。由于 M 对哥德尔运算封闭，所以 $Y \in M$。 □

该推论的证明实际给出了更强的结果，即，如果 $\psi(x, y_1, \cdots, y_m)$ 是 Δ_0 公式，则存在哥德尔运算的复合 G 使得：

$$G(X, \{y_1\}, \cdots, \{y_m\}) = \{x \in X \mid \psi(x, y_1, \cdots, y_m)\}。 \tag{8.4}$$

8.1.7. **引理** 如果 $G(X_1, \cdots, X_n)$ 是哥德尔运算的组合，则 $Z = G(X_1, \cdots, X_n)$ 等价于一个 Δ_0 公式，所以 G 相对于 **ZF** 的任意传递模型都是绝对的。

证明. 我们对 G 的复杂度做归纳。

(1) $G(X_1, \cdots, X_n)$ 是某个 G_i。

事实上，$Z = G_1$，G_2，G_4，G_5，G_6，G_7 等价于 Δ_0 公式已经在前一章中证明。以下我们证明 $Z = G_3$，G_8，G_9 和 G_{10} 都可由 Δ_0 公式表述，因而是绝对的。

- G_3：取公式 $\psi(X, Y, Z)$ 为

$$\begin{aligned} &\forall z \in Z \exists x \in X \exists y \in Y(x \in y \wedge z = (x, y)) \wedge \\ &\forall x \in X \forall y \in Y(x \in y \to \exists z \in Z(z = (x, y))), \end{aligned}$$

则 $Z = G_3(X, Y)$ 当且仅当 $\psi(X, Y, Z)$。

- G_8：取公式 $\psi(X, Y, Z)$ 为

$$\begin{aligned} &\forall z \in Z \exists x \in \mathrm{ran}(X) \exists y \in \mathrm{dom}(X)(z = (x, y)) \wedge \\ &\forall x \in \mathrm{ran}(X) \forall y \in \mathrm{dom}(X) \exists z \in Z(z = (x, y)), \end{aligned}$$

则 $Z = G_8(X, Y)$ 当且仅当 $\psi(X, Y, Z)$。

- G_9 和 G_{10} 与 G_8 类似。

(2) $G(X_1,\cdots,X_n)$ 是 $F_1(X_1,\cdots,X_n),\cdots,F_m(X_1,\cdots,X_n)$ 的复合，而对任意 $1\le i\le m$，$F_i(X_1,\cdots,X_n)$ 都是哥德尔运算的复合，并且 $Z=F_i(X_1,\cdots,X_n)$ 都可表示为 Δ_0 公式。

由于 $Z=G(X_1,\cdots,X_n)$ 可表示为

$$\forall x\in Z(x\in G(X_1,\cdots,X_n))\wedge\forall x\in G(X_1,\cdots,X_n)(x\in Z), \tag{8.5}$$

所以我们只需证明以下命题:

(a) 如果 $G(X_1,\cdots,X_n)$ 是哥德尔运算的复合，则 $x\in G(X_1,\cdots,X_n)$ 是 Δ_0 公式。

(b) 如果 $\psi(x,x_1,\cdots,x_m)$ 是 Δ_0 公式，$G(X_1,\cdots,X_n)$ 是哥德尔运算的复合，则 $\exists x\in G(X_1,\cdots,X_n)\psi(x,x_1,\cdots,x_m)$ 也是 Δ_0 公式。

这两个命题可以对 G 的复杂度施归纳容易地得到，详细证明留给读者。 □

有了这些准备，我们就可以用哥德尔运算来刻画可定义性。

8.1.8. **定理** *对任意传递集* M，$\mathrm{Def}(M)=\mathrm{cl}_G(M\cup\{M\})\cap\mathcal{P}(M)$。

证明. 任取 $\psi(x,y_1,\cdots,y_m)$，首先注意到，对任意传递集 M，任意 $y_1,\cdots,y_m\in M$，$\psi^M(x,y_1,\cdots,y_m)$ 是 Δ_0 公式。所以对任意 $X\subseteq M$，如果 $X\in\mathrm{Def}(M)$，即存在 $y_1,\cdots,y_m\in M$，

$$X=\left\{x\in M\mid\psi^M(x,y_1,\cdots,y_m)\right\},$$

则由推论8.1.6的证明不难看出，存在哥德尔运算的复合 G，使得 $X=G(M,\{y_1\},\cdots,\{y_m\})$。由此可见，$\mathrm{Def}(M)\subseteq\mathrm{cl}_G(M\cup\{M\})$。

反过来，假设 $X\in\mathrm{cl}_G(M\cup\{M\})$，并且 $X\subseteq M$，即存在函数 $G(M,y_1\cdots,y_m)$，其中 $y_1,\cdots,y_m\in M$，G 是哥德尔运算的组合，并且 $G(M,y_1\cdots,y_m)=X$。由引理8.1.7，存在 Δ_0 公式 $\varphi(x,M,y_1,\cdots,y_m)$ 等价于 $G(M,y_1\cdots,y_m)=X$，所以

$$X=\{x\mid\varphi(x,M,y_1,\cdots,y_m)\}。$$

我们可对公式 $\varphi(x,M,y_1,\cdots,y_m)$ 改写，将其中 $\exists y\in M$ 或 $\forall y\in M$ 写作 $\exists y$ 或 $\forall y$，得到公式 $\psi(x,y_1,\cdots,y_m)$，其中 $y_1,\cdots,y_m\in M$，我们有 $\psi^M(x,y_1,\cdots,y_m)$ 等价于 $\varphi(x,M,x_1,\cdots,x_n)$。不用担心 φ 包含形如 $\exists y\in x$

的约束量词，因为 M 是传递的，所以 $\exists y \in x$ 等价于 $\exists y \in M \wedge y \in x$。这样，

$$X = \{x \mid \psi^M(x, y_1, \cdots, y_m)\}。$$

这就证明了 $X \in \mathrm{Def}(M)$。 □

8.1.9. **引理** 如果 $\mathbf{M}$ 是 **ZF** 的传递模型，则对任意传递集 $M \in \mathbf{M}$，$\mathrm{Def}(M)$ 相对于 $\mathbf{M}$ 是绝对的。

证明. 关键是要证明运算 $\mathrm{cl}_G(M)$ 是绝对的。递归定义函数 $F : \omega \to \mathbf{V}$ 为：

$$F(0) = M;$$
$$F(n+1) = F(n) \cup \{G_i(X, Y) \mid X, Y \in F(n), i = 1, \cdots, 10\}。$$

则 $\mathrm{cl}_G(M) = \bigcup \mathrm{ran}(F)$。因此问题转化为函数 F 的绝对性。根据定理7.7.7，我们只需证明由 $F(n)$ 构造 $F(n+1)$ 的运算是绝对的即可。为此，注意到对任意 Z, U，$Z = \{G_i(x, y) \mid x, y \in U, i = 1, \cdots, 10\}$ 当且仅当

$$\forall z \in Z \exists x, y \in U(z = G_1(x, y) \vee \cdots \vee z = G_{10}(x, y)) \wedge$$
$$\forall x, y \in U \exists z \in Z(z = G_1(x, y) \vee \cdots \vee z = G_{10}(x, y))。$$

由于对每一 i，$z = G_i$ 都是 Δ_0 公式，所以上式也是 Δ_0 公式。这就证明了如果 $M \in \mathbf{M}$ 是传递的，则 $\mathrm{cl}_G(M)$ 相对于 $\mathbf{M}$ 是绝对的。由于 $\mathbf{M}$ 是传递的，所以

$$\begin{aligned}(x \in \mathrm{Def}(M))^{\mathbf{M}} &\leftrightarrow (x \in \mathrm{cl}_G(M \cup \{M\}) \wedge x \subseteq M)^{\mathbf{M}} \\ &\leftrightarrow (x \in \mathrm{cl}_G(M \cup \{M\})^{\mathbf{M}} \wedge (x \subseteq M)^{\mathbf{M}} \\ &\leftrightarrow x \in \mathrm{cl}_G(M \cup \{M\}) \wedge x \subseteq M \\ &\leftrightarrow x \in \mathrm{Def}(M)。\end{aligned}$$

最后，$Z = \mathrm{Def}(M)$ 当且仅当

$$\forall x \in Z(x \in \mathrm{Def}(M)) \wedge \forall y \in \mathrm{Def}(M)(x \in Z)),$$

因为 $M \in \mathbf{M}$ 蕴涵 $\mathrm{Def}(M) \subseteq \mathbf{M}$，所以以上公式相对于 $\mathbf{M}$ 是绝对的。 □

8.1.10. **引理** 对任意传递集 M，

(1) $\mathrm{Def}(M) \subseteq \mathcal{P}(M)$；

(2)　$M \subseteq \mathrm{Def}(M)$；

(3)　对任意 $X \subseteq M$，如果 X 有穷，则 $X \in \mathrm{Def}(M)$；

(4)　假设选择公理成立，并且 $|M| \geq \omega$，则 $|\mathrm{Def}(M)| = |M|$。

证明.　(1)　显然；

(2)　任取 $X \in M$，$Y = \{x \mid x \in M \wedge (x \in X)\} \in \mathrm{Def}(M)$。事实上 $Y = G_7(G_3(M, \{X\}), M)$。由于 M 是传递的，所以 $Y = X$。

(3)　假设 $X \subseteq M$ 并且 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$，则对每一 x_i，$\{x_i\} = G_1(x_i, x_i)$。如果 $n = 1$，则 $X = G_1(x_1, x_1)$；假设 $n = m$ 时已有 G 使得 $X = G(x_1, \cdots, x_m)$，则 $n = m + 1$ 时，

$$X = G_4(M, G_6(G_1(G_4(M, G(x_1, \cdots, x_m)), G_4(M, G_1(x_{m+1}, x_{m+1})))))。$$

(4)　首先，由 (3) 的证明可看出，对任意 $x \in M$，$\{x\} \in \mathrm{Def}(M)$，故 $|M| \leq |\mathrm{Def}(M)|$。另一方面，考虑引理8.1.9中的函数 F，容易看出，$|F(0)| = |M|$，并且对任意 n，$|F(n+1)| \leq |(F(n)| + |(F(n) \times F(n))^{10}| \leq |M^{10^{n+1}}|$，所以 $|\mathrm{cl}_G(M)| = |\bigcup \mathrm{ran}(F)| \leq |M^{<\omega}|$。因此，如果 $|M| \geq \omega$，则 $|M| = |M^{<\omega}| \geq \mathrm{Def}(M)$。

□

8.2　哥德尔的 L

以下我们专注于哥德尔可构成集的构造。

8.2.1. **定义**　对任意 α，我们递归定义序列 L_α 如下：

(1)　$L_0 = \emptyset$；

(2)　$L_{\alpha+1} = \mathrm{Def}(L_\alpha)$；

(3)　对任意极限序数 α，$L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$。

同时我们还定义

$$\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{On}} L_\alpha, \tag{8.6}$$

$\mathbf{L}$ 的元素称为**可构成集**。

$\mathbf{L}$ 与 $\mathbf{V}$ 的构造不同，我们在后继步骤中不是加入所有的子集，而是加入在已有层谱中可定义的子集。虽然如此，许多关于 V_α 的性质，如果它的证明中只用到了 V_α 的某些可定义子集也在 $V_{\alpha+1}$ 中，则这些性质对 L_α 也是成立的。

8.2.2. **引理** 对任意序数 α,

(1) L_α 是传递的；

(2) 如果 $\alpha < \beta$，则 $L_\alpha \subseteq L_\beta$。

(3) $L_\alpha \subseteq V_\alpha$。

证明. 如果 $\alpha = 0$，则 (1)，(2) 显然成立。假设命题对 β 成立，并且 $\alpha = \beta + 1$，则 $L_\alpha = \mathrm{Def}(L_\beta)$。由引理 8.1.10，$L_\beta \subseteq L_\alpha \subseteq \mathcal{P}(L_\beta)$，所以 (1)，(2) 都成立。(3) 显然。 □

8.2.3. **定义** 如果 $x \in \mathbf{L}$，x 在 $\mathbf{L}$ 中的秩 $\mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x)$ 定义为

$$\mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x) = \min \{\beta \mid x \in \mathbf{L}_{\beta+1}\}。 \tag{8.7}$$

8.2.4. **引理** 对任意 α,

$$L_\alpha = \{x \in \mathbf{L} \mid \mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x) < \alpha\}。 \tag{8.8}$$

证明. 显然。 □

与 V_α 类似的是，如果 $x \in \mathbf{L}$ 且 $\mathrm{rank}_{\mathbf{L}} = \beta$，则 $x \subseteq L_\beta$，$x \notin L_\beta$，但 $x \in L_{\beta+1}$。而与 V_α 不同的是，经常会有以下情况出现，L_β 的一些子集虽然属于 $\mathbf{L}$ 但不属于 $L_{\beta+1}$。以下引理是说，这种情况不会发生在序数身上，序数在 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{V}$ 中的位置是一样的。

8.2.5. **引理** 对任意序数 α,

(1) $L_\alpha \cap \mathbf{On} = \alpha$；

(2) $\alpha \in \mathbf{L} \wedge \mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(\alpha) = \alpha$。

证明. (1) 施归纳于 α。如果 $\alpha = 0$ 或 α 是极限序数，则是显然的。如果 $\alpha = \beta + 1$ 并且 $L_\beta \cap \mathbf{On} = \beta$。因为 $L_\alpha \subseteq \mathcal{P}(L_\beta) \subseteq \mathcal{P}(V_\beta)$，所以 $L_\alpha \cap \mathbf{On} \subseteq V_\alpha \cap \mathbf{On} = \alpha$，另一方面，$\beta = L_\beta \cap \mathbf{On} \subseteq L_\alpha \cap \mathbf{On}$，所以我们只需证明 $\beta \in L_\alpha$，而这又只需证明 $\beta \in \mathrm{Def}(L_\beta)$。

我们知道"β 是序数"对任意传递集是绝对的，所以

$$\beta = L_\beta \cap \mathbf{On} = \{\eta \in L_\beta \mid \eta \text{ 是序数}\} = \{\eta \in L_\beta \mid (\eta \text{ 是序数})^{L_\beta}\} \in \mathrm{Def}(L_\beta)。$$

(2) 由 (1)，任意 $\alpha \in L_{\alpha+1}$。 □

8.2.6. **引理** 对任意序数 α,

(1) $L_\alpha \in L_{\alpha+1}$；

(2) L_α 的任意有穷子集属于 $L_{\alpha+1}$；

证明. 对于 (1)，$L_\alpha = \{x \in L_\alpha \mid (x = x)^{L_\alpha}\}$。(2) 是引理8.1.10的推论。 □

$\mathbf{L}$ 与 $\mathbf{V}$ 的另一个重要不同是，我们不能断言实数属于 $\mathbf{L}$，也不能断言 $\mathbf{L}$ 是对幂运算封闭的。然而，对于自然数和 ω，我们有

8.2.7. **引理**

(1) 对任意自然数 n，$L_n = V_n$；

(2) $L_\omega = V_\omega$。

证明. (1) 可由归纳证明；(2) 是 (1) 以及引理8.2.6的推论。 □

对大于 ω 的序数 α，单从其基数上看，V_α 与 L_α 就有很大差别。

8.2.8. **引理** 如果选择公理成立，则对任意 $\alpha \geq \omega$，$|L_\alpha| = |\alpha|$。

证明. 使用超穷归纳，我们证明 $|L_\alpha| = |\alpha|$。假设 $\alpha \geq \omega$ 并且对任意 $\beta < \alpha$，$\beta \geq \omega \to |L_\beta| = |\beta|$。这首先蕴涵着如果 $\beta < \alpha$，$|L_\beta| \leq |\alpha|$。（$\beta < \omega$ 的情况见上引理8.2.7。）如果 α 是极限序数，则 $L_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta$，是 $|\alpha|$ 个基数小于 $|\alpha|$ 的集合的并，所以根据选择公理，$|L_\alpha| \leq |\alpha|$；另一方面，因为 $\alpha \subseteq L_\alpha$，所以 $|L_\alpha| \geq |\alpha|$。如果 $\alpha = \beta + 1$ 是后继序数，则由引理8.1.10，$|L_\alpha| = |\mathrm{Def}(L_\beta)| = |\alpha|$。 □

以上引理8.2.8表明，如果 $\alpha > \omega$，则 $|L_\alpha| = |V_\alpha|$ 当且仅当 $\alpha = \beth_\alpha$。$\mathcal{P}(\omega) \subset V_{\omega+1}$，而我们又没有理由相信自然数的任意子集都是可定义的，所以 $\mathcal{P}(\omega)$ 很可能不是 $\mathbf{L}$ 的子集。如果 $\mathcal{P}(\omega) \not\subseteq \mathbf{L}$，则对任意 $\alpha > \omega$，$L_\alpha \neq V_\alpha$。

8.2.9. **定理** $\mathbf{L}$ 是 $\mathbf{ZF}$ 的模型。

证明. 存在公理、外延公理、无穷公理、基础公理（$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{V}$）都是平凡的。

(1) 对于对集公理，如果 $a, b \in \mathbf{L}$，则存在 α，$a, b \in L_\alpha$。这样，$\{a, b\}$ 可以通过 L_α 定义，因此属于 $L_{\alpha+1}$。又由于 $c = \{a, b\}$ 是 Δ_0（Π_0）公式，所以对集公理对 $\mathbf{L}$ 的相对化成立。

(2) 分离公理。根据前面的分析，我们需要证明：对任意公式 $\psi(x, x_1, \cdots, x_n)$，假设 $X, x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{L}$，则集合 $Y = \{x \in X \mid \psi^{\mathbf{L}}(x, x_1, \cdots, x_n)\} \in \mathbf{L}$。取 α 使得 $X, x_1, \cdots, x_n \in L_\alpha$，则根据可构成集层谱的定义，$Y' = \{x \in L_\alpha \mid x \in X \wedge \psi^{L_\alpha}(x, x_1, \cdots, x_n)\}$ 属于 $L_{\alpha+1}$，因此也属于 $\mathbf{L}$。但问题是我们不能确定 $Y = Y'$。这要求助于反映定理7.9.2，令 $\beta > \alpha$ 并且 ψ 对 L_β 和 $\mathbf{L}$ 是绝对的，则 $Y = \{x \in L_\beta \mid x \in X \wedge \psi^{L_\beta}(x, x_1, \cdots, x_n)\} \in L_{\beta+1}$。

(3) 并集公理。并集公理的相对化可表示为 $\forall X \in \mathbf{L} \exists Y \in \mathbf{L}(Y = \bigcup X)^{\mathbf{L}}$。由于 $Y = \bigcup X$ 是 Δ_0 公式，因而是绝对的，所以我们只需证明：对任意 $X \in \mathbf{L}$，$\bigcup X \in \mathbf{L}$。如果 $X \in L_\alpha$，则由于 L_α 是传递的，所以 $\bigcup X \subseteq L_\alpha$，令 $Y = \{x \in L_\alpha \mid \exists z \in X(x \in z)\}$（注意到定义公式是 Δ_0 公式），则 $\bigcup X = Y \in L_{\alpha+1}$。

(4) 幂集公理。任给 $X \in \mathbf{L}$，我们只需证明：$\mathcal{P}(X) \cap \mathbf{L} \in \mathbf{L}$。由于存在 α，$\mathcal{P}(X) \cap \mathbf{L} \subseteq L_\alpha$，$\mathcal{P}(X) \cap \mathbf{L}$ 可由 Δ_0 公式在 L_α 中定义，因此属

于 $\mathbf{L}$。

(5) 替换公理。对任意公式 ψ，任意 $x, X \in \mathbf{L}$，假设 $\forall x \in X \exists! y \in \mathbf{L} \psi^{\mathbf{L}}(x,y)$，我们只需证明：存在 $Y \in \mathbf{L}$，$\{y \mid \exists x \in X \psi^{\mathbf{L}}(x,y)\} \subseteq Y$。如果假设成立，则集合 $\{y \mid \exists x \in X \psi^{\mathbf{L}}(x,y)\}$ 中的任意元素 y 都属于 $\mathbf{L}$，因此存在 α，$y \in L_\alpha$。取这些 α 的上确界 λ，则 $Y = L_{\lambda+1}$ 满足条件，并且 $Y \in \mathbf{L}$。 □

8.3 可构成公理与相对一致性

为了证明 $\mathbf{L}$ 还是选择公理和广义连续统假设的模型，哥德尔引入了一条新的公理：

8.3.1. **可构成公理** (哥德尔) 所有集合都是可构成的，即，$\mathbf{V} = \mathbf{L}$。

直观上 $\mathbf{L}$ 与 $\mathbf{V}$ (在 $\mathbf{ZF}$ 下，$\mathbf{V}$ 即 $\mathbf{WF}$。) 差距很大，但在 $\mathbf{ZF}$ 中，我们也不能证明 $\mathbf{L}$ 是 $\mathbf{V}$ 的真子类。事实上，在 $\mathbf{ZF}$ 中可以证明 $(\mathbf{V} = \mathbf{L})^{\mathbf{L}}$，即 $\mathbf{L}$ 是 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ 的模型。又由于 $\mathbf{L}$ 也是 $\mathbf{ZF}$ 的模型，因此 $\mathbf{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ 是一致的。

注意到 $(\mathbf{V} = \mathbf{L})^{\mathbf{L}}$ 实际上是语句

$$\forall x \in \mathbf{L} \exists \alpha \in \mathbf{L} (x \in L_\alpha)^{\mathbf{L}}。$$

由于 $\forall x \in \mathbf{L} \exists \alpha (x \in L_\alpha)$ 显然是 $\mathbf{ZF}$ 的定理，所以我们只需确认 $x \in L_\alpha$ 相对于 $\mathbf{L}$ 是绝对的。

8.3.2. **引理** 函数 $\alpha \mapsto L_\alpha$ 对 $\mathbf{ZF}$ 的任何传递模型都是绝对的。

证明. 由 $\mathbf{L}$ 的定义，此函数是通过超穷递归定义的。根据引理 7.7.7，我们只需证明在定义中使用的运算是绝对的。上一章的绝对性结果表明 $\bigcup$ 是绝对的；而引理8.1.9 证明 Def 是绝对的。 □

8.3.3. **定理** $\mathbf{L}$ 是 $\mathbf{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ 的模型。

证明. 由引理8.3.2，$(x\in L_\alpha)^{\mathbf{L}}$ 当且仅当 $x\in L_\alpha$，所以 $\mathbf{L}$ 是 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ 的模型。 □

这样我们就证明了：

8.3.4. **定理** $\mathrm{Con}(\mathbf{ZF})\to\mathrm{Con}(\mathbf{ZF}+\mathbf{V}=\mathbf{L})$。

函数 L_α 的绝对性有一些有用的推论，我们简单讨论一下。

8.3.5. **定理** 假设 $\mathbf{M}$ 是传递的真类并且是 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的模型，则 $\mathbf{L}=\mathbf{L}^{\mathbf{M}}\subseteq\mathbf{M}$。

证明. 首先我们证明 $\mathbf{On}\subseteq\mathbf{M}$：任取序数 α，由于 $\mathbf{M}$ 是真类，$\mathbf{M}\not\subseteq V_\alpha$，所以存在 $x\in\mathbf{M}$ 使得 $\mathrm{rank}(x)\geq\alpha$。又由于秩是绝对的，所以 $\mathrm{rank}(x)\in\mathbf{M}$，而 $\mathbf{M}$ 是传递的，所以 $\alpha\in\mathbf{M}$。这样，由 L_α 的绝对性，

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}^{\mathbf{M}} &= \{x\in\mathbf{M}\mid(\exists\alpha\in\mathbf{On}(x\in L_\alpha))^{\mathbf{M}}\}\\
&= \{x\mid\exists\alpha\in\mathbf{On}\cap\mathbf{M}(x\in L_\alpha\cap\mathbf{M})\}\\
&= \{x\mid\exists\alpha\in\mathbf{On}(x\in L_\alpha)\}\\
&= \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}}L_\alpha\\
&= \mathbf{L}。
\end{aligned}
$$
□

8.3.6. **定义** 如果 $\mathbf{ZF}$ 的传递模型 $\mathbf{M}$ 包含所有序数，则称 $\mathbf{M}$ 是**内模型**。

以上定理8.3.5表明 $\mathbf{L}$ 是最小的内模型。接下来我们对传递的集合模型证明类似的结果。

8.3.7. **引理** 存在 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的有穷公理集 $\{\psi_1,\cdots,\psi_n\}$，使得序数、秩、L_α 对 $\{\psi_1,\cdots,\psi_n\}$ 的任意传递模型都是绝对的。

证明. 序数的绝对性是通过在 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 内证明"α 是序数"等价于一个 Δ_0 公式得到的，而作为 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的定理，证明这一点我们只需用到 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的有穷子集 $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}$。因此对任意满足 $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}$ 的传

递模型 $\mathbf{M}$，序数都是绝对的。秩、L_α 的绝对性牵涉到递归定义，以及定义它们的性质的绝对性，而这些也都是 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的定理，所以也与序数的情况类似。最终取 $\{\psi_1,\cdots,\psi_n\}$ 为这些有穷集合的并。 □

这样，定理8.3.5可以更为形式地表述如下：对任意传递模型 $\mathbf{M}$，以下命题是 $\mathbf{ZF}$ 的定理：

$$\mathbf{M}\ 是传递的真类 \wedge \psi_1^{\mathbf{M}} \wedge \cdots \wedge \psi_n^{\mathbf{M}} \rightarrow \mathbf{L} \subseteq \mathbf{M}。$$

8.3.8. **引理** *如果 M 是传递集，则 $M \cap \mathbf{On}$ 是序数，并且是最小的不属于 M 的序数。我们今后记此序数为 α^M。*

证明. 任取 $\alpha \in M \cap \mathbf{On}$，由于 M 传递，所以 $\beta < \alpha$ 蕴涵 $\beta \in M$。 □

8.3.9. **定理** *存在 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 公理的有穷子集 $\{\psi_1,\cdots,\psi_n\}$ 满足*

$$\forall M(M\ 传递\ \wedge \psi_1^M \wedge \cdots \wedge \psi_n^M \rightarrow (L_{\alpha^M} = \mathbf{L}^M \subseteq M))。\tag{8.9}$$

证明. 令 $\{\psi_1,\cdots,\psi_n\}$ 为 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的有穷子集，满足

(1)　序数、秩、L_α 对 $\{\psi_1,\cdots,\psi_n\}$ 的任意传递模型都是绝对的。引理8.3.7保证了这一点。

(2)　$\psi_1,\cdots,\psi_n$ 可以证明不存在最大的序数。

如果 M 是传递的，并且 $\psi_1^M,\cdots,\psi_n^M$ 成立，则 α^M 是极限序数，所以 $L_{\alpha^M} = \bigcup_{\alpha\in M} L_\alpha$。而

$$\mathbf{L}^M = \{x \in M \mid (\exists\alpha \in \mathbf{On}(x \in L_\alpha))^M\} = \bigcup_{\alpha\in M} L_\alpha。$$

所以 $L_{\alpha^M} = \mathbf{L}^M \subseteq M$。 □

如果我们在上述 $\psi_1,\cdots,\psi_n$ 中加入命题 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$，则立刻得到：

8.3.10. **定理** *存在 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}+\mathbf{V}=\mathbf{L}$ 公理的有穷子集 $\{\psi_1,\cdots,\psi_{n+1}\}$ 满足*

(1)　*如果 $\mathbf{M}$ 是传递真类并且 $\psi_1^{\mathbf{M}} \wedge \cdots \wedge \psi_{n+1}^{\mathbf{M}}$，则 $\mathbf{M}=\mathbf{L}$；*

(2)　*$\forall M(M\ 传递\ \wedge \psi_1^M \wedge \cdots \wedge \psi_{n+1}^M \rightarrow (L_{\alpha^M} = M))$。*

8.3.11. **定理** **L** 上存在良序。因此 $\mathbf{V}=\mathbf{L}$ 蕴涵选择公理。

证明. 注意，我们的证明是在 **ZF** 中，因此不能引用选择公理。

首先，施归纳于 α，我们定义 L_α 上的良序 $<_\alpha$，使其满足：如果 $\alpha<\beta$，则 $<_\beta$ 是 $<_\alpha$ 的尾部扩张，即所有 $L_\beta-L_\alpha$ 的元素排在 L_α 的元素之后，更严格地说，我们要求

$$\forall\alpha\forall\beta(\alpha<\beta\rightarrow(<_\alpha\subseteq<_\beta\wedge\forall x\in L_\alpha\forall y\in(L_\beta-L_\alpha)(x<_\beta y))。\qquad(8.10)$$

(1) 假设 α 是极限序数，并且对任意 $\beta<\alpha$，$<_\beta$ 已经定义，并且都满足 (8.10) 式，定义

$$<_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}<_\beta,$$

则 $<_\alpha$ 是良序并且满足 (8.10) 式。

(2) 假设 $\alpha=\beta+1$，$<_\beta$ 已经定义，并且满足 (8.10) 式。注意到 $L_\alpha=\mathrm{cl}_G(L_\beta\cup\{L_\beta\})$ 是一个分层的结构，它的最低一层是 $L_\beta\cup\{L_\beta\}$，如果将 L_β 作为最后一个元素，则由归纳假设，此一层上已经有一个良序。接下来，L_α 的每一层都是由上一层的元素作为参数，经由哥德尔运算得来。我们可以这样排列这一层的元素：首先看定义它用到的哥德尔运算下标的最小元，小的排在前面；如果相同，再比较定义它它用到的参数，按字母顺序排列它们的次序。以下我们严格地定义 $<_\alpha$ 上的良序。仿照引理8.1.9，首先定义

$$F(0)=L_\beta\cup\{L_\beta\}\,;$$
$$F(n+1)=F(n)\cup\{G_i(X,Y)\mid X,Y\in F(n),i=1,\cdots,10\}\,,$$

则显然 $L_\alpha=\bigcup\mathrm{ran}(F)$。对每一 $n\in\omega$，我们递归定义 $F(n)$ 上的良序 $<_\alpha^n$ 如下：

(a) 对于 $F(0)$，$<_\alpha^0\;=<_\beta\cup\{(x,L_\beta)\mid x\in L_\beta\}$；

(b) 对于 $F(n+1)$，$x<_\alpha^{n+1}y$ 当且仅当下列情况之一成立：

(I) $x,y\in F(n)$ 并且 $x<_\alpha^n y$；

(II) $x\in F(n)$ 但 $y\in F(n+1)-F(n)$；

(III) $x,y\in F(n+1)-F(n)$ 并且以下情况之一成立：

(i) $i_0<j_0$，其中

$$i_0=\min\{i\mid\exists u,v\in F(n)(G_i(u,v)=x)\}\,,$$
$$j_0=\min\{j\mid\exists s,t\in F(n)(G_j(s,t)=y)\}\,。$$

(ii) $i_0 = j_0$ 并且 $u_0 <^n_\alpha s_0$，其中 i_0, j_0 如上，而

$$u_0 \in F(n)\text{是集合}\ \{u \mid \exists v \in F(n)(x = G_{i_0}(u,v))\}\ \text{在}\ <^n_\alpha\ \text{下的最小元},$$
$$s_0 \in F(n)\text{是集合}\ \{s \mid \exists t \in F(n)(y = G_{i_0}(s,t))\}\ \text{在}\ <^n_\alpha\ \text{下的最小元};$$

(iii) $i_0 = j_0$ 并且 $u_0 = s_0$ 并且 $v_0 <^n_\alpha t_0$，其中 i_0,j_0,u_0,s_0 如上，而

$$v_0 \in F(n)\text{是集合}\ \{v \mid x = G_{i_0}(u_0,v)\}\ \text{在}\ <^n_\alpha\ \text{下的最小元},$$
$$t_0 \in F(n)\text{是集合}\ \{t \mid y = G_{i_0}(s_0,t)\}\ \text{在}\ <^n_\alpha\ \text{下的最小元}。$$

令 $<_\alpha\ = \bigcup_{n\in\omega} <^n_\alpha$，容易证明 $<_\alpha$ 是良序。同时，它也满足 (8.10) 式。

(3)　令

$$<_{\mathbf{L}}\ = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} <_\alpha, \tag{8.11}$$

则 $<_{\mathbf{L}}$ 是良序（注意，它是个真类）。由于 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ 在 $\mathbf{L}$ 中为真，所以“每一集合是可良序化的”在 $\mathbf{L}$ 中为真，即选择公理在 $\mathbf{L}$ 中为真。 □

接下来我们讨论 **GCH** 的一致性。假设 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ 成立，则 $\aleph_\alpha$ 的所有子集都会在 $L_{\aleph_{\alpha+1}}$ 之前的某一层构造出来，所以都属于 $L_{\aleph_{\alpha+1}}$。又因为 $|L_{\aleph_{\alpha+1}}| = \aleph_{\alpha+1}$，所以 $2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_{\alpha+1}$。

8.3.12. **定理**　*如果 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$，则对任意无穷序数 α，$\mathcal{P}(L_\alpha) \subseteq L_{|\alpha|^+}$。*

证明. 根据定理8.3.10，令 $\{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ 为 $\mathbf{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ 的有穷子集，满足

$$\forall M(M\ \text{传递}\ \wedge \psi_1^M \wedge \cdots \wedge \psi_n^M \to (L_{\alpha^M} = M))。$$

任取 $X \subseteq L_\alpha$，令 $Y = L_\alpha \cup \{X\}$，则 $|Y| = |\alpha|$，此处使用了选择公理，但由于已经证明 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ 蕴涵选择公理，所以这是恰当的。根据推论7.9.7，存在传递模型 M，$Y \subseteq M$，$|M| = |\alpha|$，使得

$$(\psi_1^M \leftrightarrow \psi_1^{\mathbf{L}}) \wedge \cdots \wedge (\psi_n^M \leftrightarrow \psi_n^{\mathbf{L}}))。$$

由于 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$，所以 $\psi_i^{\mathbf{L}}$ 都成立，因此 ψ_i^M 为真，这蕴涵着 $M = L_{\alpha^M}$。由于 $|M| = |\alpha|$，所以 $\alpha^M < |\alpha|^+$，因此

$$X \in L_{\alpha^M} \subseteq L_{|\alpha|^+}。$$

□

8.3.13. **推论**（**ZF**）$(\mathbf{AC} + \mathbf{GCH})^{\mathbf{L}}$。

8.3.14. **推论** $\mathrm{Con}(\mathbf{ZF}) \to \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{GCH})$。

在 7.9 节中，我们曾证明（推论7.9.7）对于任何 **ZFC** 的有穷语句集 S_0，都存在可数传递模型 M 满足 S_0。事实上，对于 $\mathbf{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ 的任意有穷语句集，我们也有类似的结果。

8.3.15. **定理** （**ZF**）假设 $S_0 = \{\psi_1, \cdots, \psi_n\}$ 是 $\mathbf{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ 的有穷子集，则

$$\mathbf{ZF} \vdash \exists M(|M| = \omega \wedge M \text{ 是传递的 } \wedge (\psi_1^M \wedge \cdots \wedge \psi_n^M))。\tag{8.12}$$

证明. 令 $\varphi = \exists M(|M| = \omega \wedge M \text{ 是传递的 } \wedge (\psi_1^M \wedge \cdots \wedge \psi_n^M))$。显然，根据推论7.9.7，$\mathbf{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L} \vdash \varphi$，因此，$\mathbf{ZF} \vdash \varphi^{\mathbf{L}}$，即

$$\mathbf{ZF} \vdash \exists M \in \mathbf{L}((|M| = \omega)^{\mathbf{L}} \wedge (M \text{ 是传递的 })^{\mathbf{L}} \wedge ((\psi_1^M \wedge \cdots \wedge \psi_n^M))^{\mathbf{L}})。\tag{8.13}$$

取定使上式成立的 $M \in \mathbf{L}$，显然 $M \in \mathbf{V}$。容易看出，$(|M| = \omega)^{\mathbf{L}}$ 意为存在 $(f : \omega \to M) \in \mathbf{L}$，$(f \text{ 是双射 })^{\mathbf{L}}$。这个函数 f 属于 $\mathbf{V}$ 且 ω 是绝对的，所以在 $\mathbf{V}$ 中 $|M| = \omega$。命题“M 是传递的”是绝对的，所以 $(M \text{ 是传递的 })^{\mathbf{L}}$ 蕴涵在 $\mathbf{V}$ 中 M 是传递的。最后，由于 $\mathbf{L}$ 是传递的，所以 $((\psi_i)^M)^{\mathbf{L}}$ 等价于 ψ_i^M。综上，命题得证。 □

以上定理结合定理8.3.10立刻得到，如果罗列的公理 $\psi_1, \cdots, \psi_n$ 足够，M 一定具有 $\mathbf{L}_\alpha$ 的形式，并且 α 是可数的。

8.3.16. **引理** 假设 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$。对任意不可数正则基数 κ，$L_\kappa = H_\kappa$。

证明. 如果 $x \in L_\kappa$，则存在 $\alpha < \kappa$ 使得 $x \in L_\alpha$，所以 $\mathrm{trcl}(x) \subseteq L_\alpha$，所以 $|\mathrm{trcl}(x)| \le |L_\alpha| < \kappa$，所以 $x \in H_\kappa$，所以 $L_\kappa \subseteq H_\kappa$。

反设 $L_\kappa \neq H_\kappa$，由基础公理，取 $A \in H_\kappa - L_\kappa$ 使得 $A \cap (H_\kappa - L_\kappa) = \emptyset$。由于 H_κ 是传递的，所以 $A \subseteq H_\kappa \cap L_\kappa = L_\kappa$。取 $\alpha < \kappa$ 使得 $A \subseteq L_\alpha$。根据定理8.3.12以及 κ 是正则的，$A \in L_{|\alpha|^+} \subseteq L_\kappa$，矛盾。 □

由此我们可以证明，如果 κ 是不可数正则基数，L_κ 满足除幂集公理之外的所有 $\mathbf{ZF} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ 的公理。

8.3.17. **推论** *如果 κ 是不可数正则基数，则 $L_\kappa \vDash \mathbf{ZF} - \mathrm{Pow} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$。如果 κ 还是不可达基数，则幂集公理也在 L_κ 中成立。*

证明. 由以上定理8.3.15和定理7.8.13和定理7.8.14易得。 □

8.4 习题

8.4.1. 对任意集合 A，递归定义 $L_\alpha(A)$ 如下：

(1) $L_0(A) = \mathrm{trcl}(\{A\})$；

(2) $L_{\alpha+1}(A) = \mathrm{Def}(L_\alpha(A))$；

(3) 对任意极限序数 α，$L_\alpha(A) = \bigcup_{\beta<\lambda} L_\beta(A)$。

并且，令 $\mathbf{L}(A) = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} L_\alpha(A)$。证明：

(1) $\mathbf{L}(\emptyset) = \mathbf{L}$；

(2) 对任意 A，$\mathbf{L}(A)$ 是传递的，并且 $\mathbf{L}(A) \vDash \mathbf{ZF}$；

(3) 如果 $A \subseteq \omega$，则 $\mathbf{L}(A) \vDash \mathbf{GCH}$；

(4) 如果 $A \subseteq \omega_1$ 并且假设 $\mathbf{V} = \mathbf{L}(A)$，则 $\mathbf{GCH}$ 成立。

8.4.2. 对任意 $\alpha \geq \omega$，$|\mathbf{L}(a)| = |\mathrm{trcl}(\{A\})| \otimes |\alpha|$。

8.4.3. 除非 $\mathrm{trcl}(\{A\})$ 在 $\mathbf{L}(A)$ 中可良序化，否则 $\mathbf{L}(A)$ 不满足选择公理。

8.4.4. 不用 **AC**，证明引理 8.2.8，即对任意 $\alpha \geq \omega$，$|L_\alpha| = |\alpha|$。

8.4.5. 假设 **AC** 成立，对任意 $\alpha > \omega$，$|L_\alpha| = |V_\alpha|$ 当且仅当 $\alpha = \beth_\alpha$。

8.4.6. 证明：如果 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$，则

(1) 对任意 $\alpha > \omega$，$L_\alpha = V_\alpha$ 当且仅当 $\alpha = \beth_\alpha$；

(2) 对任意无穷基数 κ，$L_\kappa = V_\kappa$。

8.4.7. 证明整数 $\mathbb{Z}$，有理数 $\mathbb{Q}$ 都属于 $L_{\omega+\omega}$。

8.4.8. 证明推论7.8.7可以加强为：

$$\mathrm{Con}(\mathbf{ZF}) \to \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC} + \mathbf{GCH} + \neg\exists\alpha(\alpha \text{ 是弱不可达的}))。$$

8.4.9. 假设 M 是集合，我们已经熟悉集合论语言的结构 $(M, \in)$。如果 A 也是集合，我们可以考虑结构 $(M, \in, A \cap M)$，它是在 $(M, \in)$ 中加入一个新的一元谓词 $x \in A$。同时，令 $\mathrm{Def}^A(M)$ 表示 M 的所有能在结构 $(M, \in, A \cap M)$ 中可定义的子集。这样，我们即可定义 $L_\alpha[A]$ 如下：

(1) $L_0[A] = \emptyset$；

(2) $L_{\alpha+1}[A] = \mathrm{Def}^A(L_\alpha[A])$；

(3) 对任意极限序数 α，$L_\alpha[A] = \bigcup_{\beta<\lambda} L_\beta[A]$。

同时，令 $\mathbf{L}[A] = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} L_\alpha[A]$。证明：

(1) 如果 $\alpha \leq \beta$，则 $L_\alpha[A] \subseteq L_\beta[A]$；

(2) 对任意 α，$L_\alpha[A] \subseteq V_\alpha$；

(3) 每个 $L_\alpha[A]$ 都是传递的；

(4) 如果 $\alpha < \beta$，则 $L_\alpha[A] \in L_\beta[A]$；

(5) $L_\alpha[A] \cap \alpha = \alpha$；

(6) 如果 $n \in \omega$，则 $L_n[A] = V_n$；

(7) 对所有 $\alpha \geq \omega$，$|L_\alpha[A]| = |\alpha|$。

8.4.10. 如果 $A \subseteq \mathbf{L}$，则 $\mathbf{L}[A] = \mathbf{L}$。

8.4.11. 任给集合 A，证明 $\mathbf{L}[A]$ 是 **ZF** 的传递模型。

8.4.12. 任给集合 A，$\mathbf{L}[A]$ 满足选择公理。

第九章　力迫

即使将来有人成功证明康托假设也不可证，那也绝不是该问题的最终答案。只有不承认古典集合论公理及其概念有意义的人（比如直觉主义者）才会满足于此种独立性结果；而坚信以下这一点的人则不会：集合论的概念和公理描述着某种非常确定的实在。原因是：在此种实在中，康托假设只能是或真或假，这一问题在现有公理下的不可判定性只能表明这些公理不能完全描述此种实在。此种信念绝非幻想，因为即使该问题是现有公理不能判定的，仍可能指出其他判定它的方法。

库尔特・哥德尔

力迫的引入是集合论发展的里程碑，是集合论从经典进入现代的标志。同时，直到今天，力迫仍然是一个迅速发展的领域，新的力迫观念不断涌现。本章只是对最基本的力迫思想做一个初步的介绍，然后用力迫的方法证明一些相对一致性的结果，如 $\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC} + \neg\mathbf{CH})$。

回忆上一章的思路，由于已知 $2^{\aleph_0} \geq \aleph_1$ 在 $\mathbf{V}$ 中是真的，为了得到 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ 的模型，我们构造了一个比 $\mathbf{V}$ “细”的模型 $\mathbf{L}$，在 $\mathbf{L}$ 中，ω 的子集受到限制，使得它们的数量不会超出 $\aleph_1$。这是内模型的方法。现在我们要考虑相反的方向，构造一个 $\neg\mathbf{CH}$，即 $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ 的模型 N，很自然的想法是“扩张”而不是收缩我们的集合宇宙，使得 N 要比 $\mathbf{V}$ 更“宽”，在其中 ω 的子集更为丰富，可以是 $\aleph_2$，甚至更大。这可以称为外模型的方法。

我们考虑外模型的方法还有另一个重要原因：要得到 $\mathbf{ZFC} + \neg\mathbf{CH}$，或更弱一点，$\mathbf{ZFC} + \mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ 的相对一致性，上一章的方法已经不适用了。假设我们在 $\mathbf{ZFC}$ 中定义一个传递的真类 $\mathbf{N}$，并证明 $\mathbf{ZFC} + \mathbf{V} \neq \mathbf{L}$ 的公理

都在 $\mathbf{N}$ 中为真。根据 $\mathbf{L}$ 的极小性，$\mathbf{L} \subseteq \mathbf{N}$。但是 $\mathbf{L} \neq \mathbf{N}$，因为 $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ 在 $\mathbf{L}$ 中为真，在 $\mathbf{N}$ 中为假。而这等于在 **ZFC** 中证明了存在 $\mathbf{L}$ 的真扩张，亦即 $\mathbf{V} \neq \mathbf{L}$。可是，除非 **ZFC** 不一致，否则这是不可能的，我们刚在上一章证明了 $\mathbf{ZFC} + \mathbf{V} = \mathbf{L}$ 是一致的。

9.1 力迫法的基本思想

如果你是一个柏拉图主义者，一定相信 **ZFC** 是一致的，所以它有一个模型。由一阶逻辑的洛文海姆 -司寇伦定理，它有一个可数模型。假设 M 是 **ZFC** 的一个可数传递模型，我们打算构造 M 的一个扩张 N，使得 N 也是 **ZFC** 的可数传递模型，同时，连续统假设的否定，如 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$，在 N 中为真。由于 M 是可数的，所以 $\alpha^M = M \cap \mathbf{On}$ 的基数是可数的。并且 $\aleph_1^M < \aleph_2^M < \alpha^M$，即生活在 M 中的人认为的第一、第二个不可数基数，在生活于 $\mathbf{V}$ 中的我们看来，都是可数的。

为了方便易读，我们今后使用 $o(M)$ 表示 α^M。

也许 M 中的人认为 **CH** 是真的，即他们认为的自然数的所有子集 $\mathcal{P}(\omega)^M$ 恰好有 $\aleph_1^M$ 个。由于从我们看来 M 是可数的，所以大量 ω 的子集不在 M 中，我们可以取 ω_2^M 个不在 M 的子集放入 M 中，造成一个新的模型 N。这样，在 N 中，$|\mathcal{P}(\omega)| = \aleph_2$，连续统假设不成立。当然，这里 $\aleph_2$ 只是一个例子，我们可以令 N 满足 $|\mathcal{P}(\omega)| = \aleph_7$，$|\mathcal{P}(\omega)| = \aleph_{\omega+1}$ 等等。由于寇尼希引理要求 $\mathrm{cf}(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$，所以（在 **ZFC** 中）我们不能构造满足，例如，$|\mathcal{P}(\omega)| = \aleph_\omega$ 的模型。有趣的是，除此之外，我们几乎没有任何别的限制。

在以上过程中，我们必须保证 N 仍然是 **ZFC** 的模型，所以当你向 M 中添加一个元素时，还要将能由它通过集合运算构造的新元素也一起添加进去。另外一个技术上的困难是，为了保证 N 中的人们确信 $2^{\aleph_0} = \aleph_2$，还必须保证 $\omega_1^M = \omega_1^N$，$\omega_2^M = \omega_2^N$。解决这类技术性的问题会给我们带来一定的麻烦。

以上思路可以总结为：力迫法是要证明

$$\begin{array}{c}\text{任何 } \mathbf{ZFC} \text{ 的可数传递模型 } M \\ \text{都可扩展为 } \mathbf{ZFC} + \neg\mathbf{CH} \text{ 的可数传递模型 } N\text{。}\end{array} \tag{9.1}$$

接下来的问题是如何将力迫构造转化为相对一致性证明，即如何由此证明

$$\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}+\neg\mathbf{CH})。 \tag{9.2}$$

如果仍然假定你是一个柏拉图主义者，事情就非常简单，事实上对任意集合论语句 σ，你可以证明如下更强的定理：

9.1.1. **定理** *假设 $\tau_{\mathbb{N}}$ 是一个算术语句，即，它中间的量词只约束 $\mathbb{N}$ 中的元素。σ 是任意集合论语句，如果我们可以证明：*

任何 $\mathbf{ZFC}$ 的可数传递模型 M 都可扩展为
$\mathbf{ZFC}+\sigma$ 的可数传递模型 N，　　(∗)

则

$$\mathbf{ZFC}+\sigma\vdash\tau_{\mathbb{N}} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{ZFC}\vdash\tau_{\mathbb{N}}。 \tag{9.3}$$

柏拉图主义的证明：反设 $\mathbf{ZFC}\nvdash\tau_{\mathbb{N}}$，则由完全性定理，存在 $\mathbf{ZFC}$ 的可数传递模型 M，$\neg(\tau_{\mathbb{N}})^M$。根据（∗），令 N 是扩张得到的 $\mathbf{ZFC}+\sigma$ 的模型，由于所有算术语句对于可数传递模型都是绝对的，所以我们也有 $\neg(\tau_{\mathbb{N}})^N$，因此 $\mathbf{ZFC}+\sigma\nvdash\tau_{\mathbb{N}}$。 □

9.1.2. **推论** *假设（∗）成立，则 $\mathbf{ZFC}$ 一致蕴涵 $\mathbf{ZFC}+\sigma$ 一致。*

证明. 应用定理9.1.1，取 $\tau_{\mathbb{N}}$ 为 $0=1$。如果 $\mathbf{ZFC}+\sigma$ 不一致，则 $\mathbf{ZFC}+\sigma\vdash 0=1$，所以 $\mathbf{ZFC}\vdash 0=1$，因此不一致。 □

不过，由于哥德尔的不完全性定理，我们不能证明 $\mathbf{ZFC}$ 的可数传递模型 M 的存在。所以，对于一个非柏拉图主义者，定理9.1.1的证明甚至都不知如何开始。但是，从我们接下来证明（∗）的方法可以看出，应用类似的方法，我们实际可以证明：

对任意 $\mathbf{ZFC}$ 的有穷子集 S，总存在 $\mathbf{ZFC}$ 的另一个有穷子集 T，
使得 T 的任何可数传递模型 M 都可扩展为　　(∗∗)
$S+\sigma$ 的可数传递模型 N。

而有了（∗∗），我们可以“构造性”地证明定理9.1.1。

定理9.1.1的构造性证明： 首先需要说明，我们可以令 T 满足所有绝对性的要求，即，对 T 的任何传递模型，所有已经证明的绝对性结果都成立。假

设 $\mathbf{ZFC}+\sigma\vdash\tau_{\mathbb{N}}$。由于证明是有穷的，所以存在 **ZFC** 的有穷子集 S，使得 $S+\sigma\vdash\tau_{\mathbb{N}}$。令 T 为满足（$**$）的 **ZFC** 的有穷子集。由反映定理（推论7.9.7），

$$\mathbf{ZFC}\vdash\exists M(M\text{ 是可数传递集合 }\wedge M\models T)。$$

取定这样的一个 M，令 N 为由（$**$）生成的 N，

$$\mathbf{ZFC}\vdash N\text{ 是可数传递集合 }\wedge N\models S+\sigma。$$

由假设，这蕴涵着

$$\mathbf{ZFC}\vdash(\tau_{\mathbb{N}})^N。$$

又由于算术语句是绝对的，而 N 是 T 的传递模型，所以

$$\mathbf{ZFC}\vdash(\tau_{\mathbb{N}})^N\leftrightarrow\tau_{\mathbb{N}}。$$

这蕴涵着 $\mathbf{ZFC}\vdash\tau_{\mathbb{N}}$。 □

我们今后提到"M 是 **ZFC** 的传递模型"时，实际可看作是对"M 是 **ZFC** 的一个足够大有穷大片段的模型"的一种简便说法。

9.2 脱殊扩张

接下来我们要严格实现上一章的思想。假设 M 是（**ZFC** 的）可数传递模型。我们定义 M 中的一个偏序集 $\mathbb{P}$，当 $\mathbb{P}$ 满足一定的条件时，$\mathbb{P}$ 的"脱殊滤"（定义见下）G 一般不属于 M。通过将 G 添加到 M 中，我们就能得到 M 的一个扩张 $M[G]$。并且，$M[G]$ 的重要性质由 $\mathbb{P}$ 决定。

9.2.1. **定义** 令 $(\mathbb{P},\leq,\mathbf{1})$ 为偏序集，其中 $\leq$ 为其上的偏序，而 $\mathbf{1}$ 为 $\mathbb{P}$ 的最大元，即，$\forall p\in\mathbb{P}(p\leq\mathbf{1})$。在不引起误解的时候，一般我们将 $(\mathbb{P},\leq,\mathbf{1})$ 简记为 $\mathbb{P}$。

(1) $\mathbb{P}$ 常称为**力迫偏序**，或直接称为**力迫**。$\mathbb{P}$ 的元素称为**力迫条件**。如果 $p\leq q$，就称力迫条件 p **强于**力迫条件 q；

(2) $\mathbb{P}$ 的子集 D 是**稠密的**当且仅当 $\forall p\in\mathbb{P}\exists q\in D(q\leq p)$；

(3) $\mathbb{P}$ 的子集 G 称为$\mathbb{P}$ **上的滤**当且仅当：

(a) $\mathbf{1} \in G$；

(b) $\forall p, q \in G \exists r \in G (r \leq p \wedge r \leq q)$，即任意 $p, q \in G$ 都是**相容的**；

(c) $\forall p, q \in G (q \leq p \wedge q \in G \rightarrow p \in G)$。

(4) 令 M 为一集合（如 **ZF** 的可数传递模型），如果 $G \subseteq \mathbb{P}$ 是滤，并且满足对任意稠密子集 $D \subseteq \mathbb{P}$，$D \in M$ 蕴涵 $G \cap D \neq \emptyset$，就称 G 是M **上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤** 。

从下面的引理可以看出我们为什么要求 M 是可数的，因为对可数的 M，其上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤总是存在的。

9.2.2. **引理** 如果 M 是 **ZFC** 的可数传递模型（事实上只需 M 是 $\mathbf{ZF}-\mathrm{Pow}$ 的模型）并且 $\mathbb{P} \in M$，则对任意 $p \in \mathbb{P}$，存在 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤 G 并且 $p \in G$。

证明. 令 $(D_n \mid n \in \omega)$ 为 $\mathbb{P}$ 的所有属于 M 的稠密子集。递归定义序列 $(q_n \mid n \in \omega)$：$q_0 = p$，对任意 n，q_{n+1} 属于 D_n 并且 $q_{n+1} \leq q_n$。由于 D_n 是稠密的，这样的 q_{n+1} 总能找到。最后，令 G 为 $\{q_n \mid n \in \omega\}$ 生成的滤，即 $G = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n (q_n < p)\}$。容易验证 G 是滤，并且 $p \in G$，并且所有 $q_n \in G$。所以 G 是脱殊的。 □

要保证脱殊滤不再属于 M，我们要求偏序集 $\mathbb{P}$ 有以下的性质。

9.2.3. **定义** 偏序集 $\mathbb{P}$ 的元素 p, q 称为**不相容的** 当且仅当它们不是相容的，即不存在 $r \in \mathbb{P}$，$r \leq p \wedge r \leq q$，一般记作 $p \perp q$。偏序集 $\mathbb{P}$ 称为**无原子的**，如果对每一 $p \in \mathbb{P}$，存在不相容的 $r, q \in \mathbb{P}$ 满足：$r \leq p \wedge q \leq p$。

9.2.4. **命题** 令 M 是 **ZFC** 的传递模型，$\mathbb{P} \in M$。如果 $\mathbb{P}$ 是无原子的并且 G 是 M 上 $\mathbb{P}$-脱殊滤，则 $G \notin M$。

证明. 因为 $\mathbb{P}$ 是无原子的，所以 $\mathbb{P} - G$ 是 $\mathbb{P}$ 中稠密的。因此 $\mathbb{P} - G \notin M$，否则，根据定义 $G \cap (\mathbb{P} - G) \neq \emptyset$，这是不可能的。因此 $G \notin M$，因为作为 **ZFC** 的模型， M 对集合的差是封闭的。 □

在继续引入新的概念之前，我们先看一个例子。

9.2.5. **例** 令 M 是 **ZFC** 的可数传递模型。对 M 中的集合 I, J，定义

$$\mathrm{Func}_\omega(I,J) = \{p \mid p \text{ 是 } I \text{ 到 } J \text{ 中的部分函数 } \wedge |p| < \omega\}。 \tag{9.4}$$

考虑力迫 $\mathbb{P} = (\mathrm{Func}_\omega(I,J), \supseteq, \emptyset)$。由于 $I, J \in M$，所以 $\mathbb{P} \in M$。显然，如果 I 是无穷的，则对每一 $x \in I$，$y \in J$，集合

$$D_x = \{p \in \mathbb{P} \mid x \in \mathrm{dom}(p)\} \tag{9.5}$$

和

$$D_y = \{p \in \mathbb{P} \mid y \in \mathrm{ran}(p)\} \tag{9.6}$$

都是稠密的，而且因为它们的定义只用到了 $\mathbb{P}$ 和 x, y，所以都属于 M。如果 G 是 $\mathbb{P}$ 上的滤，则 G 中的函数都是两两相容的，所以 $f_G = \bigcup G$ 是 I 到 J 的（部分）函数，特别地，如果 G 还是 M 脱殊滤，则 $G \cap D_x$ 以及 $G \cap D_y$ 都非空，所以 $\mathrm{dom}(f_G) = I$ 并且 $\mathrm{ran}(f_G) = J$，f_G 是 I 上到 J 的满射。

以下我们定义 M 的扩张 $M[G]$，简单说来，$M[G]$ 是由 M 中的元素和 M 脱殊滤 G 构造而得，称为 M 的**脱殊扩张**。注意到，只要我们令 M 中的 $\mathbb{P}$ 为无原子的，G 就不属于 M，所以 $M[G]$ 总是真扩张。

另一方面，虽然 $M[G]$ 的众多元素不属于 M，但是，“生活于 M 中的人们”却“知道”$M[G]$ 中每个元素是如何构造的，对 $M[G]$ 中的每个元素，他们都有一个相应的“名字”描述它的构造。这一点之所以重要，是因为我们需要在 M 中讨论一个集合论语句在 $M[G]$ 中的真假。

9.2.6. **定义** 对任意力迫 $\mathbb{P}$，任意序数 α，递归定义 $V^{\mathbb{P}}_\alpha$ 如下：

(1) $V^{\mathbb{P}}_0 = \emptyset$；

(2) $V^{\mathbb{P}}_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V^{\mathbb{P}}_\alpha \times \mathbb{P})$；

(3) 对任意极限序数 λ，$V^{\mathbb{P}}_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} V^{\mathbb{P}}_\xi$。

令 $\mathbf{V}^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{On}} V^{\mathbb{P}}_\alpha$。$\mathbf{V}^{\mathbb{P}}$ 的元素称为$\mathbb{P}$-**名字**。

因此，τ 是 $\mathbb{P}$ 名字当且仅当 τ 是二元关系，并且对任意 $(\sigma, p) \in \tau$，都有 σ 是 $\mathbb{P}$ 名字，而 $p \in \mathbb{P}$。例如，假设 $p \in \mathbb{P}$，则以下为 $\mathbb{P}$ 名字：

$$\emptyset, \quad \{(\emptyset, \mathbf{1})\}, \quad \{(\emptyset, p)\}, \quad \{(\{(\emptyset, p)\}, p), (\{(\emptyset, p)\}, \mathbf{1})\}, \cdots。$$

形如 $\{(\tau, \mathbf{1})\}$ 的名字比较特殊，我们特别地做如下定义：

9.2.7. **定义** 对任意力迫 $\mathbb{P}$，对任意集合 x，递归定义

$$\check{x} = \{(\check{y}, \mathbf{1}) \mid y \in x\}。 \tag{9.7}$$

接下来我们定义名字的“值”，它可以看作是名字所“指称”的对象：

9.2.8. **定义** 对任意力迫 $\mathbb{P}$，任意 $\mathbb{P}$ 上的滤 G，以及任意 $\mathbb{P}$-名字 τ，递归定义 τ 的**值**τ_G 或 $\mathrm{val}(\tau, G)$ 为：如果对任意 $\beta < \alpha$，$\sigma \in V_\beta^{\mathbb{P}}$，$\sigma_G$ 已有定义，则对于 $\tau \in V_\alpha^{\mathbb{P}}$，

$$\tau_G = \{\sigma_G \mid \exists p(\sigma, p) \in \tau \wedge p \in G\}。 \tag{9.8}$$

显然，在以上所举的 $\mathbb{P}$ 名字中，$\emptyset_G = \emptyset$，$\{(\emptyset, \mathbf{1})\}_G = \{\emptyset\}$，而 $\{(\emptyset, p)\}_G$ 则取决于 p 是否属于 G：若属于，则为 $\{\emptyset\}$，否则为 $\emptyset$。假设 $p \in G$，则 $\{(\{(\emptyset, p)\}, p), (\{(\emptyset, p)\}, \mathbf{1})\}_G = \{\{(\emptyset, p)\}_G\} = \{\{\emptyset\}\}$。另外，用归纳法不难证明，对任意 x，任意 G，$\check{x}_G = x$。

这些定义对于 **ZFC** 的（事实上只需要 **ZF** − Pow 的）任何传递模型都是绝对的。

9.2.9. **引理** “τ 是 $\mathbb{P}$ 名字”，“τ_G 是 $\mathbb{P}$ 名字的值”对任意 **ZFC** 的传递模型 M 是绝对的。

证明. 假设 $\psi(\tau)$ 是表示“τ 是 $\mathbb{P}$ 名字”的公式。我们对 $\mathrm{rank}(\tau)$ 归纳证明

$$\psi(\tau) \leftrightarrow \psi^M(\tau)。 \tag{9.9}$$

首先，$\psi(\tau)$ 的意思是：

$$\tau \text{ 是关系 } \wedge \forall\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)(\sigma \text{ 是 } \mathbb{P}\text{-名字}) \wedge \forall p \in \mathrm{ran}(\tau)(p \in \mathbb{P})。 \tag{9.10}$$

除了“σ 是 $\mathbb{P}$-名字”外，其他公式都是绝对的。由于 $\sigma \in \mathrm{dom}(\tau)$，故 $\mathrm{rank}(\sigma) < \mathrm{rank}(\tau)$，根据归纳假设，“$\sigma$ 是 $\mathbb{P}$-名字”也是绝对的。τ_G 的情况完全类似。 □

M 中名字的值构成了 M 的扩张 $M[G]$：

9.2.10. **定义** 令 M 为 **ZFC** 的传递模型，$\mathbb{P}\in M$，定义 $M^{\mathbb{P}}=\mathbf{V}^{\mathbb{P}}\cap M$，或者，由绝对性，

$$M^{\mathbb{P}}=\{\tau\in M \mid (\tau\text{是}\mathbb{P}\text{-名字})^M\}。\tag{9.11}$$

如果 $G\subseteq\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{P}$ 上的滤，则

$$M[G]=\{\tau_G \mid \tau\in M^{\mathbb{P}}\}。\tag{9.12}$$

直观上，我们实际是定义了“生活于 M 中的人们”使用的一种语言，他们用这种语言“描绘”了一个新的宇宙 $M[G]$。从 M 之外的人看来，“M 中的人”对 $M[G]$ 的信息是不完全的。例如，考虑例9.2.5中的函数 $f_G=\bigcup G$。显然，每个 G 的元素都在 M 中，并且是 f_G 的片段，所以都包含了 f_G 的部分信息。但由于 $f_G\notin M$（这是因为 $\mathbb{P}$ 是无原子的，所以 $G\notin M$），所以“M 中的人们”不可能有 f_G 的全部信息。

以下定理初步总结了 $M[G]$ 的一些性质。注意，它没有假设 M 是可数的，也没有用到 G 是脱殊滤。

9.2.11. **引理** 令 M 为 **ZFC** 的传递模型，$\mathbb{P}\in M$ 为力迫，$G\subseteq\mathbb{P}$ 是非空的滤，则

(1) 对任意 N 是 **ZFC** 的传递模型，如果 $M\subseteq N$ 并且 $G\in N$，则 $M[G]\subseteq N$；

(2) $M[G]$ 是传递的；

(3) $\forall x\in M(\check{x}\in M^{\mathbb{P}}\wedge\check{x}_G=x)$，因此 $M\subseteq M[G]$；

(4) 如果 $\Gamma=\{(\check{p},p)\mid p\in\mathbb{P}\}$，则 $\Gamma_G=G$，因此 $G\in M[G]$；

(5) $\forall\tau\in M^{\mathbb{P}}(\mathrm{rank}(\tau_G)\leq\mathrm{rank}(\tau))$；

(6) $o(M)=o(M[G])$。

证明. (1) 由于 τ,G 都属于 N，而 τ_G 的定义是绝对的，所以 $\tau_G=\tau_G^N\in N$。

(2) 由定义立得。实际上，任何 $\mathbb{P}$ 名字的值 τ_G 都是 $\mathbb{P}$ 名字的值的集合。

(3) 对任意 $x\in M$，$\check{x}$ 是 $\mathbb{P}$ 名字。施归纳于 x（实际上是 x 在 $V_\alpha^{\mathbb{P}}$ 层谱中的秩），容易证明 $\check{x}_G=x$。

(4) $\Gamma_G = \{\check{p}_G \mid p \in G\} = \{p \mid p \in G\} = G$。

(5) 假设 $\tau \in V^{\mathbb{P}}_\alpha$，并且对任意 $\beta < \alpha$，任意 $\sigma \in V^{\mathbb{P}}_\beta$，都有 $\text{rank}(\sigma_G) \leq \text{rank}(\sigma)$。而 $\text{rank}(\tau_G) = \sup\{\text{rank}(\sigma_G)+1 \mid \sigma_G \in \tau_G\} \leq \sup\{\text{rank}(\sigma)+1 \mid \sigma \in \tau\} = \text{rank}(\tau)$。

(6) 由 (3)，$M \subseteq M[G]$，所以 $o(M) \leq o(M[G])$。而由 (5) 以及以下事实：$\forall \tau \in M(\text{rank}(\tau) \in M)$，可知 $o(M[G]) \leq o(M)$。 □

以下是一个辅助性的概念。

9.2.12. **定义** 如果 $D \subseteq \mathbb{P}$ 而 $p \in \mathbb{P}$，则 D 是p **下稠密的**当且仅当

$$\forall q \leq p \exists r \leq q (r \in D)。 \tag{9.13}$$

9.2.13. **命题** 假设 M 是 **ZFC** 的传递模型，$\mathbb{P} \in M$，$D \subseteq \mathbb{P}$ 并且 $D \in M$。同时令 G 为 M 上的 $\mathbb{P}$ 脱殊滤；则：

(1) 或者 $G \cap D \neq \emptyset$ 或者存在 $q \in G$，对任意 $r \in D$，都有 $r \perp q$；

(2) 如果 $p \in G$ 并且 D 是 p 下稠密的，则 $G \cap D \neq \emptyset$。

证明. 对于 (1)，定义集合 D' 为：

$$D' = \{q \mid \exists r \in D(q \leq r)\} \cup \{q \mid \forall r \in D(r \perp q)\}。 \tag{9.14}$$

假设 $p \in \mathbb{P}$ 并且 $p \notin D'$，则一定存在 $r \in D$，r 和 p 是相容的。令 q 是 p, r 的扩张，则 $q \in D'$，因此 D' 是稠密的。这样 $G \cap D' \neq \emptyset$。假设 $G \cap D = \emptyset$，则 $G \cap \{q \mid \forall r \in D(r \perp q)\} \neq \emptyset$，命题成立。

对于 (2)，如果 $G \cap D = \emptyset$，则根据 (1)，取 $q \in G$ 使得对任意 $r \in D$，$r \perp q$。令 $q' \in G$ 满足 $q' \leq q$ 并且 $q' \leq p$。而 D 是 p 下稠密的，所以有存在 $r \in D$，$r \leq q'$，因而 $r \leq q$，矛盾。 □

9.3 力迫

我们需要证明如果 M 是 **ZFC** 的模型，则 $M[G]$ 也是。这里最困难的是分离公理模式。假设 $\psi(x, y)$ 是公式，$\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$ 是名字，我们必须证明

$X = \{x \in \tau_G \mid \psi^{M[G]}(x,\sigma_G)\}$ 属于 $M[G]$。要做到这一点，我们需要找到一个名字 π 使得 $X = \pi_G$。这又回到了我们最初的直观：生活在 M 中的人即使没有关于 G 的全部信息，也能谈论名字和名字的所指。事实上，我们可以定义 π 为

$$\pi = \{(\rho,p) \mid \rho \in \tau \land p \in \mathbb{P} \land p \Vdash \psi(\rho,\sigma)\}。 \tag{9.15}$$

其中 $p \Vdash \psi(\rho,\sigma)$ 的意思是：对任意包含 p 的脱殊滤 G，$\psi(\rho_G,\sigma_G)$ 在 $M[G]$ 中为真。而这正是"生活于 M 中的人"谈论 $\psi^{M[G]}(x,\sigma_G)$ 这一 $M[G]$ 中的事实的方式。如果我们还能使得 $p \Vdash \psi(\rho,\sigma)$ 在 M 中可定义，则 $\pi \in M^{\mathbb{P}}$，剩下的就是验证 $X = \pi_G$ 了。带着这样的想法，我们定义以下概念。

9.3.1. **定义** 令 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 为公式，自由变元都在 $x_1,\cdots,x_n$ 中；令 M 为 **ZFC** 的可数传递模型，$\mathbb{P} \in M$ 为力迫，$\tau_1,\cdots,\tau_n \in M^{\mathbb{P}}$，并且 $p \in \mathbb{P}$；则 $p \Vdash_{\mathbb{P},M} \varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 当且仅当

$$\forall G[(G \text{ 是 } \mathbb{P} \text{ 中的 } M \text{ 脱殊滤 } \land p \in G) \to \varphi^{M[G]}(\tau_{1G},\cdots,\tau_{nG})]。 \tag{9.16}$$

$p \Vdash \varphi$ 读做p **力迫** φ。

前面我们提到，力迫条件 p 包含了关于 G，因而也关于由 G 构造的对象（例如 f_G）的部分信息，而且如果 $q \le p$，则 q 所含的信息更多。以下引理再次说明了这一点。

9.3.2. **引理** $(p \Vdash \varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n) \land q \le p) \to q \Vdash \varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n)$。

证明. 显然，对任意滤 G，如果 $q \in G$ 并且 $q \le p$，则 $p \in G$。 □

接下来我们必须解决两个问题：第一个前面已经提到，即如何使 $\pi \in M^{\mathbb{P}}$？这需要力迫关系是 M 中可定义的；第二个问题是如何证明 $X = \pi_G$？这需要我们证明，对任意 M 脱殊滤 G，

$$\psi^{M[G]} \text{ 当且仅当 } \exists p \in G(p \Vdash \psi)。 \tag{9.17}$$

第一个问题要困难得多。我们的思路是定义一个新的关系 $\Vdash^*$，使得我们能够证明：对任意 $p \in \mathbb{P}$，任意公式 ψ，

$$p \Vdash \psi \text{ 当且仅当 } (p \Vdash^* \psi)^M。 \tag{9.18}$$

9.3.3. **定义** 给定力迫 $\mathbb{P}$。令 $p \in \mathbb{P}$ 为力迫条件，$\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 为公式，$\tau_1, \cdots, \tau_n$ 为 $\mathbb{P}$-名字。我们定义 $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 如下：

(1) 若 φ 是 $x_1 = x_2$，则 $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ 当且仅当

(a) 对任意 $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$，

$$\{q \leq p \mid q \leq s_1 \to \exists(\pi_2, s_2) \in \tau_2(q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\} \tag{9.19}$$

是 p 下稠密的，并且

(b) 对任意 $(\pi_2, s_2) \in \tau_2$，

$$\{q \leq p \mid q \leq s_2 \to \exists(\pi_1, s_1) \in \tau_1(q \leq s_1 \wedge q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2)\} \tag{9.20}$$

是 p 下稠密的。

(2) 如果 φ 是 $x_1 \in x_2$，则 $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$ 当且仅当

$$\{q \mid \exists(\pi, s) \in \tau_2(q \leq s \wedge q \Vdash^* \tau_1 = \pi)\} \tag{9.21}$$

是 p 下稠密的。

(3) 若 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \psi_1(x_1, \cdots, x_n) \wedge \psi_2(x_1, \cdots, x_n)$，则 $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 当且仅当

$$p \Vdash^* \psi_1(\tau_1, \cdots, \tau_n) \text{ 并且 } p \Vdash^* \psi_2(\tau_1, \cdots, \tau_n)。 \tag{9.22}$$

(4) 如果 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \neg\psi(x_1, \cdots, x_n)$，则 $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 当且仅当

$$\neg\exists q \leq p(q \Vdash^* \psi(\tau_1, \cdots, \tau_n))。 \tag{9.23}$$

(5) 如果 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \exists x\psi(x, x_1, \cdots, x_n)$，则 $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 当且仅当

$$\left\{r \mid \exists\sigma \in V^{\mathbb{P}}(r \Vdash^* \psi(\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n))\right\} \tag{9.24}$$

是 p 下稠密的。

9.3.4. **注** 我们对以上定义做一些说明。

(1) 这是一个归纳定义。对于原子语句 $\tau_1 = \tau_2$，我们使用了以下良基关系上的递归：$(\pi_1, \pi_2) \leq (\tau_1, \tau_2) \leftrightarrow \pi_1 \in \mathrm{dom}(\tau_1) \wedge \pi_2 \in \mathrm{dom}(\tau_2)$。有了 $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$ 的定义，我们直接定义了 $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$。而对于一般语句，则使用了对公式复杂度的递归。

(2) 为了说明关于等式的情况，我们考虑一个具体例子：$\tau_1 = \{(\pi_1, s)\}$，$\tau_2 = \{(\pi_2, s)\}$。根据定义，为了知道是否 $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$，需要（在 M 中）确定是否 $\tau_{1G} = \tau_{2G}$。这有以下两种情况：如果 $p \perp s$，则对任意 G，如果 $p \in G$，都有 $s \notin G$，故 $\tau_{1G} = \tau_{2G} = \emptyset$。而如果 $p \leq s$，则对任意 G，如果 $p \in G$，则 $s \in G$，所以 $\tau_{1G} = \{\pi_{1G}\}$，$\tau_{2G} = \{\pi_{2G}\}$。此时 $\tau_{1G} = \tau_{2G}$ 当且仅当 $\pi_{1G} = \pi_{2G}$，即 $p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ 当且仅当 $p \Vdash \pi_1 = \pi_2$。所以，一般来说，$p \Vdash \tau_1 = \tau_2$ 当且仅当

$$\forall q(q \leq p \wedge q \leq s \to q \Vdash \pi_1 = \pi_2)。\tag{9.25}$$

(3) $\Vdash^*$ 是在 $\mathbf{V}$ 中定义的，事实上它没有涉及任何特殊的模型。在原子语句的定义中，只用到了绝对概念，因而是绝对的。虽然一般语句的定义不是绝对的，但事实上我们只关心相对化 $(p \Vdash^* \varphi)^M$。这个命题可以看作是在 M 中确定 $p \Vdash \varphi$ 的尝试。接下来我们要证明 $p \Vdash \varphi$ 当且仅当 $(p \Vdash^* \varphi)^M$，从而 $p \Vdash \varphi$ 是在 M 中可定义的。

9.3.5. **引理** 以下命题等价：

(1) $p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$；

(2) $\forall r \leq p(r \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))$；

(3) $\{r \mid r \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)\}$ 是 p 下稠密的。

证明. (2) ⇒ (1)，(2) ⇒ (3) 是平凡的。所以我们只需归纳证明 (1) ⇒ (2) 和 (3) ⇒ (1)。对于原子语句 $\tau_1 = \tau_2$ 或 $\tau_1 \in \tau_2$，(1) ⇒ (2) 是因为如果 D 是在 p 下稠密的并且 $r \leq p$，则 D 也是在 r 下稠密的；而 (3) ⇒ (1) 则是因为如果集合

$$\{r \mid D \text{ 是 } r \text{ 下稠密的}\}\tag{9.26}$$

是 p 下稠密的，则 D 本身是 p 下稠密的。对于一般语句，则可对公式的长度归纳，结论易得。 □

9.3.6. **定理** 令 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 为公式，M 为 **ZFC** 的传递模型，$\mathbb{P}$ 为力迫并且属于 M，$\tau_1, \cdots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ 为 M 中的 $\mathbb{P}$-名字。令 G 为 M 脱殊滤，则

(1) 如果 $p \in G$ 并且 $(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$，则

$$(\varphi(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG}))^{M[G]};$$

(2) 如果 $(\varphi(\tau_{1G},\cdots,\tau_{nG}))^{M[G]}$，则

$$\exists p \in G((p \Vdash^* \varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n))^M)。$$

证明. 我们对公式的长度做归纳，而对于原子公式则利用良基关系上的超穷归纳证明。

(1) 假设 $\varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n)$ 是 $\tau_1=\tau_2$。由于 $\Vdash^*$ 对原子公式来说是绝对的，所以我们省略掉 ^{M}。

(a) 首先我们证明 (1)。假设 $p \Vdash^* \tau_1=\tau_2$，我们需要证明 $\tau_{1G}=\tau_{2G}$。为此我们先证明 $\tau_{1G}\subseteq\tau_{2G}$，而另一个方向则完全类似。任取 $\pi_{1G}\in\tau_{1G}$，其中 $(\pi_1,s_1)\in\tau_1$ 并且 $s_1\in G$。取定 $q\in G$ 使得 $q\le p$ 并且 $q\le s_1$（由命题9.2.13，这样的 q 总是存在）。根据引理9.3.5，$q\Vdash^*\tau_1=\tau_2$。再根据命题 9.2.13(2)，存在 $r\in G$，$r\le q$ 使得

$$r\le s_1\to\exists(\pi_2,s_2)\in\tau_2(r\le s_2\wedge r\Vdash^*\pi_1=\pi_2)。\tag{9.27}$$

而我们已经知道 $r\le q\le s_1$，所以以上蕴涵式的右边 $\exists(\pi_2,s_2)\in\tau_2(r\le s_2\wedge r\Vdash^*\pi_1=\pi_2)$ 成立。取定这样的 (π_2,s_2)，则因为 $s_2\in G$（这是由于 $r\in G$ 并且 $r\le s_2$），所以 $\pi_{2G}\in\tau_{2G}$。又根据归纳假设，$r\Vdash^*\pi_1=\pi_2$ 蕴涵 $\pi_{1G}=\pi_{2G}$，所以 $\pi_{1G}\in\tau_{2G}$。

(b) 现在证明 (2)。假设 $\tau_{1G}=\tau_{2G}$。定义以下公式：

$$\begin{aligned}
\psi_1(r) &: r\Vdash^*\tau_1=\tau_2;\\
\psi_2(r) &: \exists(\pi_1,s_1)\in\tau_1(r\le s_1\wedge\forall(\pi_2,s_2)\in\tau_2\\
&\quad\ \forall q\in\mathbb{P}((q\le s_2\wedge q\Vdash^*\pi_1=\pi_2)\to q\perp r));\\
\psi_3(r) &: \exists(\pi_2,s_2)\in\tau_2(r\le s_2\wedge\forall(\pi_1,s_1)\in\tau_1\\
&\quad\ \forall q\in\mathbb{P}((q\le s_1\wedge q\Vdash^*\pi_1=\pi_2)\to q\perp r))。
\end{aligned}$$

令 $D=\{r\mid\psi_1(r)\vee\psi_2(r)\vee\psi_3(r)\}$。注意，由绝对性，$D\in M$。

首先我们证明以下命题：

$$\text{如果 } r\in G\text{，则 }\neg\psi_2(r)\wedge\neg\psi_3(r)。\tag{9.28}$$

以 ψ_2 为例，假设 $r\in G$ 并且 $(\pi_1,s_1)\in\tau_1$。由此 $s_1\in G$，故 $\pi_{1G}\in\tau_{1G}=\tau_{2G}$，取 $(\pi_2,s_2)\in\tau_2$ 使得 $s_2\in G$ 并且 $\pi_{1G}=\pi_{2G}$；由归纳假设，可取 q_0 使得 $q_0\Vdash^*\pi_1=\pi_2$。现在取定 $q\in G$ 使得 $q\le q_0$ 并且 $q\le s_2$。根据引理 9.3.5，我们有 $q\Vdash^*\pi_1=\pi_2$，再由 ψ_2，可得 $q\perp r$。但是 $q,r\in G$，故矛盾。

由（9.28）式以及 D 的定义，我们只需证明 $G \cap D \neq \emptyset$，就能得到 $\exists p \in G(p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2)^M$。而要证明前者则只需证明 D 是稠密的。为此，令 $p \in \mathbb{P}$，我们需要找到 $r \in D$ 使得 $r \leq p$。如果 $p \Vdash^* \tau_1 = \tau_2$，则 $p \in D$，取 $r = p$ 即可。否则，定义9.3.3的（1-i）或（1-ii）不成立。假设（1(a)）不成立（(1(b)）的情况类似)。应用 p 下稠密的定义，取 $(\pi_1, s_1) \in \tau_1$，取 r 使得 $r \leq p$ 并且 $r \leq s_1$，并且满足：

$$\forall q \leq r(q \leq s_1 \wedge \forall(\pi_2, s_2) \in \tau_2(\neg(q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2 \wedge q \leq s_2)))。 \tag{9.29}$$

根据以上公式，如果 $(\pi_2, s_2) \in \tau_2$，$q \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ 并且 $q \leq s_2$，则 $q \perp r$。这是因为：如果存在 s，$s \leq r$ 并且 $s \leq q$，则根据前提，$s \leq r$ 并且 $s \leq s_1$，$s \Vdash^* \pi_1 = \pi_2$ 并且 $s \leq s_2$。而（9.29）式正是断定这样的 s 不存在。这样，我们证明了 r 满足 ψ_2，因此属于 D。

（2） 假设 $\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$ 是 $\tau_1 \in \tau_2$。

(a) 还是先证明（1)。假设 $p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$，并且 $p \in G$，则集合

$$D = \{q \mid \exists(\pi_2, s_2) \in \tau_2(q \leq s_2 \wedge q \Vdash^* \pi_2 = \tau_1)\} \tag{9.30}$$

是 p 下稠密的。取 $q \in G \cap D$，$(\pi_2, s_2) \in \tau_2$，使得 $q \leq s_2$ 并且 $q \Vdash^* \pi_2 = \tau_1$。显然，$\pi_{2G} \in \tau_{2G}$。而且，应用 1。1 于 $q \Vdash^* \pi_2 = \tau_1$，可得 $\pi_{2G} = \tau_{1G}$。所以 $\tau_{1G} \in \tau_{2G}$。

(b) 接下来证明（2)。假设 $\tau_{1G} \in \tau_{2G}$。根据定义，存在 $\pi_{2G} \in \tau_{2G}$ 使得 $s_2 \in G$ 并且 $\pi_{2G} = \tau_{1G}$。应用 1。2，存在 $r \in G$ 满足 $r \Vdash^* \pi_2 = \tau_1$。取 $p \leq r$ 并且 $p \leq s_2$，则由引理9.3.5(2)，对任意 $q \leq p$，$q \leq s_2$ 并且 $q \Vdash^* \pi_2 = \tau_1$。再根据定义9.3.3(2)，$p \Vdash^* \tau_1 \in \tau_2$。注意我们所证明的，要比定义9.3.3(2) 所要求的强。

（3） 以下证明（1）和（2）关于一般公式成立。此处需要注意，由于定义9.3.3对一般公式不是绝对的，故必须写明其相对化。为了简明起见，我们省略掉 $\tau_1, \cdots, \tau_2$。

(a) 假设 φ 是 $\neg\psi$。

(i) 为证明（1)，我们假设（1)、(2）对 ψ 成立，同时假设 $p \in G$ 并且 $(p \Vdash^* \neg\psi)^M$。为了证明 $(\neg\psi)^{M[G]}$，我们反设 $(\psi)^{M[G]}$。根据归纳假设（应用（2）于 ψ)，存在 $q \in G$，$(q \Vdash^* \psi)^M$。取 $r \in G$ 使得 $r \leq p$ 并且 $r \leq q$，则根据引理9.3.5(2)，$(r \Vdash^* \psi)^M$，与 $(p \Vdash^* \neg\psi)^M$ 的定义矛盾。

(ii) 为证明 (2) 对否定成立，假设 $(\neg\psi)^{M[G]}$。定义集合

$$D=\left\{p \mid (p \Vdash^* \psi)^M \vee (p \Vdash^* \neg\psi)^M\right\}。\tag{9.31}$$

显然，$D\in M$ 并且 D 是稠密的。取 $q\in G\cap D$，如果 $(q \Vdash^* \psi)^M$，则根据归纳假设，$(\psi)^{M[G]}$，与假设矛盾，所以只有 $(p \Vdash^* \neg\psi)^M$。

(b) 假设 φ 是 $\psi_1\wedge\psi_2$。

(i) 假设 $(p \Vdash^* \varphi)^M$，则 $(p \Vdash^* \psi_1)^M$ 并且 $(p \Vdash^* \psi_2)^M$。由归纳假设，$(\psi_1)^{M[G]}$ 并且 $(\psi_2)^{M[G]}$，所以 $(\varphi)^{M[G]}$。

(ii) 假设 $\varphi^{M[G]}$，则有 $\psi_1^{M[G]}$ 并且 $\psi_2^{M[G]}$。由归纳假设，存在 $p,q\in G$，$(p \Vdash^* \psi_1)^M$ 并且 $(q \Vdash^* \psi_2)^M$。取 $r\in G$ 使得 $r\le p$ 并且 $r\le q$，则 $(r \Vdash^* \psi_1)^M$ 并且 $(r \Vdash^* \psi_2)^M$，因此 $(r \Vdash^* \varphi)^M$。

(c) 假设 φ 是 $\exists x\psi(x)$。

(i) 如果 $p\in G$ 并且 $(p \Vdash^* \exists x\varphi(x))^M$，则集合

$$D=\left\{r \mid \exists\sigma\in M^{\mathbb{P}}(r \Vdash^* \varphi(\sigma))^M\right\}\tag{9.32}$$

是 p 下稠密的。取 $q\in G\cap D$，$\sigma\in M^{\mathbb{P}}$ 使得 $(q \Vdash^* \varphi(\sigma))^M$，由归纳假设，$\varphi^{M[G]}(\sigma_G)$，故 $(\exists x\varphi(x))^{M[G]}$。

(ii) 假设 $(\exists x\varphi(x))^{M[G]}$，并取 $\sigma\in M^{\mathbb{P}}$ 使得 $\varphi^{M[G]}(\sigma_G)$。应用归纳假设，存在 $p\in G$，$(p \Vdash^* \varphi(\sigma))^M$，由引理9.3.5(2)，对任意 $q\le p$，$(q \Vdash^* \varphi(\sigma))^M$。再根据定义9.3.3(5)，$(p \Vdash^* \exists x\varphi(x))^M$。注意我们所证明的，要比定义9.3.3(5) 所要求的强。 □

有了这些准备，我们现在可以证明 $\Vdash$ 在 M 中是可定义的。

9.3.7. 力迫定理 令 M 为 **ZFC** 的可数传递模型，$\mathbb{P}$ 为 M 中的力迫；令 $\varphi(x_1,\cdots,x_n)$ 为公式，$\tau_1,\cdots,\tau_n\in M^{\mathbb{P}}$ 为 M 中的 $\mathbb{P}$-名字。

(1) 对任意 $p\in\mathbb{P}$，

$$p \Vdash \varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n) \text{ 当且仅当 } (p \Vdash^* \varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n))^M;\tag{9.33}$$

(2) 对任意 M 上的 $\mathbb{P}$ 脱殊滤 G，

$$\varphi(\tau_{1G},\cdots,\tau_{nG})^{M[G]} \text{ 当且仅当 } \exists p\in G(p \Vdash \varphi(\tau_1,\cdots,\tau_n))。\tag{9.34}$$

证明. (1) 必要条件（自右向左）的方向由定理9.3.6（1）和 $\Vdash$ 的定义立得。充分条件（自左向右）的方向证明如下：假设 $p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$，由引理9.3.5（3）我们只需证明集合

$$D = \{r \mid (r \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M\} \tag{9.35}$$

是 p 下稠密的。反设不成立，取 $q \leq p$ 满足 $\neg\exists r \leq q(r \in D)$。根据 $\Vdash^*$ 的定义，$(q \Vdash^* \neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$。由刚刚证明的必要条件的方向，我们有 $q \Vdash \neg\varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$。取 G 是 M 上的 $\mathbb{P}$ 脱殊滤使得 $q \in G$（根据引理9.2.2，这样的 G 总是存在的），则由定义，$(\neg\varphi(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG}))^{M[G]}$。同时注意到 $p \in G$ 并且我们的假设是 $p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n)$，所以 $\varphi^{M[G]}(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG})$。矛盾。

(2) 首先假设 $\varphi(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG})^{M[G]}$，由定理9.3.6（2）可知 $\exists p \in G(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$。再由本定理（1），$\exists p \in G(p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))$。反过来，假设 $\exists p \in G(p \Vdash \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))$，由（1），$\exists p \in G(p \Vdash^* \varphi(\tau_1, \cdots, \tau_n))^M$，由定理9.3.6（1）可得 $\varphi^{M[G]}(\tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG})$。

□

9.4 $M[G]$ 中的 ZFC

接下来我们要证明对任意 **ZFC** 的可数传递模型 M，它的如上构造的脱殊扩张 $M[G]$ 也是 **ZFC** 的模型。

(1) 存在公理。显然，$M[G]$ 非空。

(2) 外延公理。显然，$M[G]$ 是传递的。

(3) 分离公理。我们需要证明：对任意 $\sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n \in M^{\mathbb{P}}$ 以及任意公式 $\psi(x, v, y_1, \cdots, y_n)$，集合

$$X = \{a \in \sigma_G \mid (\psi(a, \sigma_G, \tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG}))^{M[G]}\} \tag{9.36}$$

属于 $M[G]$。令

$$\rho = \{(\pi, p) \in \text{dom}(\sigma) \times \mathbb{P} \mid p \Vdash (\pi \in \sigma \wedge \psi(\pi, \sigma, \tau_1, \cdots, \tau_n))\}。 \tag{9.37}$$

由于力迫是 M 中可定义的（力迫定理 9.3.7 (1)），故 $\rho \in M^{\mathbb{P}}$。我们计算 ρ_G。为了简明，我们省去公式中的参数。首先，ρ_G 的元素

形如 π_G，其中 $(\pi,p)\in\rho$ 并且 $p\in G$。任取 $\pi_G\in\rho_G$，根据 ρ 的定义，$p\Vdash(\pi\in\sigma\wedge\psi(\pi))$；又根据 $\Vdash$ 的定义，$\pi_G\in\sigma_G$ 并且 $\psi^{M[G]}(\pi_G)$。所以 $\pi_G\in X$，即 $\rho_G\subseteq X$。反之，假设 $a\in\sigma_G$ 并且 $\psi^{M[G]}(a)$，则存在 $\pi\in\mathrm{dom}(\sigma)$，$a=\pi_G$。所以 $(\pi_G\in\sigma_G\wedge\psi(\pi_G))^{M[G]}$。由力迫定理9.3.7 (2) ，存在 $p\in G$，$p\Vdash\pi\in\sigma\wedge\psi(\pi)$，所以 $(\pi,p)\in\rho$，故 $\pi_G\in\rho_G$，即 $X\subseteq\rho_G$。这样，我们证明了 $X=\rho_G\in M[G]$。

(4)　对集公理。假设 $a,b\in M[G]$，则存在 $\mathbb{P}$ 名字 σ,τ，使得 $a=\sigma_G,b=\tau_G$。令 $\pi=\{(\sigma,\mathbf{1}),(\tau,\mathbf{1})\}$，则 π 是 $\mathbb{P}$ 名字，而 $\pi_G=\{\sigma_G,\tau_G\}$，属于 $M[G]$。

(5)　并集公理。我们只需证明，对任意 $X\in M[G]$，$\bigcup X\in M[G]$。利用 $M[G]$ 的传递性，我们证明存在 $Y\in M[G]$ 使得 $\bigcup X\subseteq Y$。取 $\mathbb{P}$ 名字 τ 使得 $\tau_G=X$，令 $\pi=\bigcup\mathrm{dom}(\tau)$，则 π 是 $\mathbb{P}$ 名字。令 $Y=\pi_G\in M[G]$。任取 $x\in X$，令 σ 为使得 $x=\sigma_G$ 的 $\mathbb{P}$ 名字。根据定义，$\sigma\in\mathrm{dom}(\tau)$，所以 $\sigma\subseteq\pi$。还是由定义可知，$\sigma_G\subseteq\pi_G$。既然 X 的元素都是 $\pi_G=Y$ 的子集，所以 $\bigcup X\subseteq Y$。

(6)　幂集公理。我们需要证明：对任意 $X\in M[G]$，$\mathcal{P}^{M[G]}(X)=\mathcal{P}(X)\cap M[G]\in M[G]$。由分离公理，我们只需证明存在 $Y\in M[G]$，$\mathcal{P}(X)\cap M[G]\subseteq Y$。令 σ 为见证 $X=\sigma_G$ 的 $\mathbb{P}$ 名字。定义集合：

$$S=\{\tau\in M^{\mathbb{P}}\mid\mathrm{dom}(\tau)\subseteq\mathrm{dom}(\sigma)\}=\mathcal{P}^M(\mathrm{dom}(\sigma)\times\mathbb{P})。\tag{9.38}$$

令 $\rho=S\times\{\mathbf{1}\}$，令 $Y=\rho_G=\{\tau_G\mid\tau\in S\}$。为证明 $X=\sigma_G$ 的任意子集都属于 $Y=\rho_G$，取 $\mu\in M^{\mathbb{P}}$ 使得 $\mu_G\subseteq\sigma_G=X$，我们证明 $\mu_G\in\rho_G=Y$。令

$$\tau=\{(\pi,p)\mid\pi\in\mathrm{dom}(\sigma)\wedge p\Vdash\pi\in\mu\},\tag{9.39}$$

则 $\tau\in S$，所以 $\tau_G\in\rho_G$。以下证明 $\mu_G=\tau_G$。由于 $\mu_G\subseteq\sigma_G$，所以对 μ_G 的任意元素 π_G，都有 $\pi\in\mathrm{dom}(\sigma)$；同时，存在 $p\in G$ 使得 $p\Vdash\pi\in\mu$　($\Vdash$ 的定义)；所以 $(\pi,p)\in\tau$，故 $\pi_G\in\tau_G$，这就证明了 $\mu_G\subseteq\tau_G$。反之，如果 $\pi_G\in\tau_G$，则存在 $p\in G$，使得 $(\pi,p)\in\tau$。这样就有 $p\Vdash\pi\in\mu$，所以 $(\pi_G\in\mu_G)^{M[G]}$，由绝对性，$\pi_G\in\mu_G$，这就证明了 $\tau_G\subseteq\mu_G$。这样就有 $\tau_G=\mu_G$，故 $\mu_G\in\rho_G=Y$。

(7)　无穷公理。显然，$\omega=\check{\omega}_G\in M[G]$。

(8)　基础公理。基础公理在任何类中都真。

(9) 替换公理。我们需要证明：对任意 $\sigma_G, \tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG} \in M[G]$ 以及任意公式 $\psi(x, v, , r, y_1, \cdots, y_n)$，如果

$$(\forall x \in \sigma_G \exists! y \psi(x, y, \sigma_G, \tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG}))^{M[G]}, \tag{9.40}$$

则存在 $\rho \in M^{\mathbb{P}}$ 满足

$$\forall x \in \sigma_G \exists y \in \rho_G(\psi(x, y, \sigma_G, \tau_{1G}, \cdots, \tau_{nG}))^{M[G]}。\tag{9.41}$$

为简明起见，以下我们省略掉参数。令 $S \in M$ 满足 $S \subseteq M^{\mathbb{P}}$ 并且

$$\begin{aligned} \forall \pi \in \mathrm{dom}(\sigma) \forall p \in \mathbb{P}[\exists \mu \in M^{\mathbb{P}}(p \Vdash \psi(\pi, \mu)) \to \\ \exists \mu \in S(p \Vdash \psi(\pi, \mu))]。\end{aligned} \tag{9.42}$$

由力迫定理9.3.7（1），$p \Vdash \psi(\pi, \mu)$ 可由形如 φ^M 的公式定义，所以根据反映定理，我们可以找到合适的序数 α，使 $S = V_\alpha^M \cap M^{\mathbb{P}}$。因此以上定义是合适的。令 $\rho = S \times \{\mathbf{1}\}$，则 $\rho_G = \{\mu_G \mid \mu \in S\}$。任给 $x \in \sigma_G$，我们证明 $\exists y \in \rho_G(\psi(x, y))^{M[G]}$。令 $\pi \in \mathrm{dom}(\sigma)$ 为见证 $x = \pi_G$ 的 $\mathbb{P}$ 名字。由假设，$(\exists y \psi(\pi_G, y))^{M[G]}$，故可取 $\nu \in M^{\mathbb{P}}$ 满足 $\psi^{M[G]}(\pi_G, \nu_G)$。由力迫定理 9.3.7（2），存在 $p \in G$，$p \Vdash \psi(\pi, \nu)$。根据（9.42）$\exists \mu \in S(p \Vdash \psi(\pi, \mu))$，再根据力迫定理9.3.7（2）可得 $\exists y \in \rho_G(\psi(x, y))^{M[G]}$。

(10) 选择公理。我们验证选择公理的以下形式：

$$\forall x \exists \alpha \in \mathbf{On} \exists f(f \text{ 是函数 } \wedge \mathrm{dom}(f) = \alpha \wedge x \subseteq \mathrm{ran}(f))。\tag{9.43}$$

对任意 $x = \sigma_G \in M[G]$，$\sigma \in M^{\mathbb{P}}$，自然也属于 M。由于假设选择公理在 M 中成立，我们可以令 $\mathrm{dom}(\sigma) = \{\pi_\gamma \mid \gamma < \alpha\}$。其中函数 $\gamma \mapsto \pi_\gamma, \gamma \in \alpha$ 属于 M。注意 $\{(\check{\gamma}, \mathbf{1}), (\pi_\gamma, \mathbf{1})\}$ 实际上是无序对 $\{\gamma, \pi_{\gamma G}\}$ 的名字，仿此我们还可定义有序对 $(\gamma, \pi_{\gamma G}) = \{\{\gamma\}, \{\gamma, \pi_{\gamma G}\}\}$ 的名字，我们暂把 $(\gamma, \pi_{\gamma G})$ 的名字记为 $pair(\check{\gamma}, \pi_\gamma)$。令 $S = \{pair(\check{\gamma}, \pi_\gamma) \mid \gamma < \alpha\}$。令 $\tau = S \times \{\mathbf{1}\}$，则 $\tau \in M$（实际上属于 $M^{\mathbb{P}}$），并且 $\tau_G = \{(\gamma, \pi_{\gamma G}) \mid \gamma \in \alpha\}$。故 τ_G 是函数，其定义域为 α，并且 $\sigma_G \subseteq \mathrm{ran}(\tau_G)$。

综合 1–10，我们证明了以下定理：

9.4.1. **定理** *令 M 为 **ZFC** 的可数传递模型，$\mathbb{P}$ 为 M 中的力迫，G 为 M 上的 $\mathbb{P}$ 脱殊滤，则 $M[G]$ 是 **ZFC** 的模型。*

而这又蕴涵着以下定理：

9.4.2. 定理 *令 M 为 **ZFC** 的任意可数传递模型，$\mathbb{P}\in M$ 为偏序集，G 为 $\mathbb{P}$ 中 M-脱殊滤，则存在 **ZFC** 的可数传递模型 $M[G]$，满足 $M\subseteq M[G]$，$G\in M[G]$ 并且 $o(M)=o(M[G])$。同时，$M[G]$ 是满足以上条件的模型中最小的。*

由以上定理我们立即可以得到可构成公理的独立性。

9.4.3. 推论 $\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC})\to\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}+\mathbf{V}\neq\mathbf{L})$。

证明. 令 M 为 **ZFC** 的可数传递模型，$\mathbb{P}$ 为 M 中的力迫，G 为 M 上的 $\mathbb{P}$ 脱殊滤，使得 $G\notin M$。由于 $o(M[G])=o(M)$，所以 $\mathbf{L}^{M[G]}=\mathbf{L}^{M}\subseteq M$，所以 $M[G]$ 满足 $\mathbf{V}\neq\mathbf{L}$。 □

9.5 CH 的相对独立性

我们现在用力迫的方法来证明 $\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}+\neg\mathbf{CH})$。在本节中，$M$ 始终是一个 **ZFC** 的可数传递模型。而 M 中的力迫 $\mathbb{P}$ 则定义为:

9.5.1. 定义 *定义力迫 $\mathbb{P}=\mathrm{Func}(I,J)$ 为：*

$$\begin{aligned}\mathrm{Func}(I,J)=\{p\mid |p|<\omega\wedge p\ \text{是函数}\\ \wedge\mathrm{dom}(p)\subseteq I\wedge\mathrm{ran}(p)\subseteq J\}。\end{aligned}\tag{9.44}$$

令 $(\mathbb{P},\leq,\mathbf{1})=(\mathrm{Func}(I,J),\supseteq,\emptyset)$。

9.5.2. 引理 *如果 $I,J\in M$，I 无穷并且 J 非空，而 G 是 M 上的 $\mathrm{Func}(I,J)$ 脱殊滤，则 $\bigcup G$ 是 I 到 J 上的满射。*

证明. 参见例9.2.5。 □

9.5.3. 例 假设 κ 是 M 中的不可数基数，即 $\kappa\in M$ 并且 (κ 是不可数基数 $)^M$。令 G 是 M 中的 $\mathrm{Func}(\aleph_0,\kappa)$ 脱殊滤，则 $f_G=\bigcup G\in M[G]$ ($\bigcup$ 是绝对的)。而根据以上引理 f_G 是 $\aleph_0$ 到 κ 上的满射，故 κ 在 $M[G]$ 中是可数的。这个例子说明基数概念对 M 和 $M[G]$ 不是绝对的。

9.5.4. **引理** *如果 $\alpha \in M$ 并且 G 是 $\text{Func}(\alpha \times \aleph_0, 2)$ 脱殊滤，则 $(2^{\aleph_0} \geq |\alpha|)^{M[G]}$。*

证明. 令 $f_G = \bigcup G : \alpha \times \aleph_0 \to 2$，可以将 f_G 看作是一个 α 序列，这个序列中的项是 $\aleph_0$ 到 2 上的函数，即，对任意 $\beta < \alpha$，任意 $n \in \aleph_0$，令 $f_\beta(n) = f_G(\beta, n)$。由绝对性，序列 $(f_\beta \mid \beta < \alpha)$ 属于 $M[G]$。对任意 $\zeta < \xi < \alpha$，集合

$$E_\zeta^\xi = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n < \aleph_0[(\zeta, n) \in \text{dom}(p) \wedge (\xi, n) \in \text{dom}(p) \\ \wedge p(\zeta, n) \neq p(\xi, n)]\}$$

在 $\mathbb{P}$ 中稠密并且属于 M。故 $G \cap E_\zeta^\xi \neq \emptyset$，而这蕴涵着 $f_\zeta \neq f_\xi$。所以，在 $M[G]$ 中，函数 $\beta \mapsto f_\beta$ 将 α 一一映入 $2^{\aleph_0}$ 中。 □

初看起来，我们可以取 $\alpha = (\aleph_8)^M$，从而由以上定理得到 $(2^{\aleph_0} \geq \aleph_8)^{M[G]}$，这就是 **CH** 的独立性。但为此我们必须首先知道 $\alpha = (\aleph_8)^M = (\aleph_8)^{M[G]}$，即 $\aleph_8$ 对 $M, M[G]$ 是绝对的。由例9.5.3可知，这一点并非是平凡的。

9.5.5. **定义** *令 $\mathbb{P}$ 是偏序集而 $D \subseteq \mathbb{P}$，如果对任意 $p, q \in D$ 都有 $p \neq q$ 蕴涵 $p \perp q$，就称 D 是 $\mathbb{P}$ 的***反链***。如果 $\mathbb{P}$ 的任意反链都是可数的，就称 $\mathbb{P}$ 有***可数反链性质***，通常记作 c.c.c.。*[①]

接下来我们会证明，如果一个力迫 $\mathbb{P}$ 在 M 中具有可数反链性质，则基数概念对 M 和脱殊扩张 $M[G]$ 是绝对的，而幸运的是力迫 $\text{Func}(\kappa \times \aleph_0, 2)$ 恰好在 M 中具有可数反链性质。

9.5.6. **Δ-系统引理** *如果 $\mathcal{A}$ 是有穷集合的族，并且 $|\mathcal{A}| > \aleph_0$，则存在不可数的 $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$，以及有穷集合 R 满足：对任意 $X, Y \in \mathcal{A}_0$，$X \cap Y = R$。具有这样性质的集合族 $\mathcal{A}_0$ 称为***Δ-系统***，有穷集合 R 称为 $\mathcal{A}_0$ 的***根***。*

证明. 由于 $\mathcal{A}$ 不可数，而 $\mathcal{A}$ 的元素都是有穷的，故存在 $n \in \omega$，集合 $\{X \in \mathcal{A} \mid |X| = n\}$ 不可数。因此，不妨设 $\mathcal{A}$ 中的元素都以 n 为基数，以下施归纳于 n 来证明。如果 $n = 1$(n 不能为 0，否则 $\mathcal{A}$ 的基数就为 1，而我们假设 $\mathcal{A}$ 是不可数的)，则 $\mathcal{A}$ 中元素两两不交。令 $R = \emptyset$，$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$，

[①] 通常的称呼是“可数链性质”，c.c.c. 实际上是 countable chain condition 的缩写。但似乎“可数反链”的名称更能名副其实。

命题成立。假设命题对 n 成立，我们证明对 $n+1$ 也成立。此时有两种情况：(1) 存在 x，$\mathcal{A}$ 中有不可数无穷多个 X 以 x 为元素。此时集合族 $\{X-\{x\} \mid X \in \mathcal{A} \wedge x \in X\}$ 不可数，而且其元素的基数都为 n，应用归纳假设，命题得证。(2) 否则，每个 x 至多属于可数多个 $X \in \mathcal{A}$。因此，对任意 $\xi < \aleph_1$，集合族

$$\{Y \in \mathcal{A} \mid \exists \zeta < \xi (Y \cap X_\zeta \neq \emptyset)\} \tag{9.45}$$

至多是可数的。这就使我们可以递归构造不可数序列 $(X_\xi \in \mathcal{A} \mid \xi < \aleph_1)$ 使得任意 X_ξ 两两不相交，令 $\mathcal{A}_0$ 为以上序列的值域，$R = \emptyset$。得证。 □

9.5.7. **引理** *如果 I 是任意集合而 J 是可数的，则 $\mathrm{Func}(I,J)$ 有可数反链性质。*

证明. 如果 I 或 J 为空集，则 $\mathrm{Func}(I,J) = \{\emptyset\}$ 或 $\mathrm{Func}(I,J) = \emptyset$，显然有 *c.c.c.*。另外，如果 $\mathrm{Func}(I,J)$ 可数，命题也已经成立。假设 I, J 都不为空集，并且 $\mathrm{Func}(I,J)$ 不可数。令 X 为它的任意不可数子集，我们证明 X 不是反链，即找到 $p, q \in X$，使得 p, q 是相容的。令 $\mathcal{A} = \{\mathrm{dom}(p) \mid p \in X\}$，则 $\mathcal{A}$ 是不可数的。这是因为 J 是可数的，而每个 $\mathcal{A}$ 中的元素 A 都是有穷的，所以由 A 到 J 的函数至多有可数多个，而 X 不可数。根据 Δ-系统引理 9.5.6，存在 Δ 系统 $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$，令 R 为 $\mathcal{A}_0$ 的根。定义集合 $Y = \{p \in X \mid \mathrm{dom}(p) \in \mathcal{A}_0\}$，由于 J 是可数的，故 J^R 也是可数的，因此 Y 中的函数限制在 R 上只有可数多个不同的可能。因此存在 $p, q \in Y$，$p \neq q$，但是 $p \restriction R = q \restriction R$，即 p, q 是相容的函数（定义2.2.8 (1)），所以 $p \cup q$ 是一个函数（见练习2.2.9），它属于 X 并且是 p, q 的共同扩张，所以 X 不是反链。 □

以下命题可以说明可数反链性质在力迫中的重要性。它使我们可以在 M 中逼近 $M[G]$ 中的任何函数。

9.5.8. **引理** *假设 $\mathbb{P} \in M$ 并且 ($\mathbb{P}$ 有可数反链性质)^M，G 为 M 上的 $\mathbb{P}$ 脱殊滤。令 $A, B \in M$，$f : A \to B$ 属于 $M[G]$，则存在 M 中的映射 $F : A \to \mathcal{P}(B)$，$\forall a \in A (f(a) \in F(a))$ 并且 $\forall a \in A ((|F(a)| \leq \aleph_0)^M)$。*

证明. 取 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ 为函数 f 的名字。由力迫定理，存在 $p \in G$ 使得 $p \Vdash \tau$ 是 $\check{A}$ 到 $\check{B}$ 的函数。定义

$$F(a) = \left\{b \in B \mid \exists q \leq p (q \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b})\right\}。 \tag{9.46}$$

由力迫的定义及力迫定理9.3.7知 $F \in M$。

任给 $a \in A$，令 $b = f(a)$，则存在 $r \in G$，$r \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}$。由于 p, r 都属于 G，故存在 $q \in G$，$q \leq r$ 并且 $q \leq p$ 并且 $q \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}$。所以 $b \in F(a)$。

在 M 中应用选择公理，定义函数 $Q : F(a) \to \mathbb{P}$，使得对任意 $b \in F(a)$，$Q(b) \leq p$ 并且 $Q(b) \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}$。对任意 $b, b' \in F(a)$，如果 $b \neq b'$，则 $Q(b) \perp Q(b')$，否则就存在脱殊滤 H，$b, b' \in H$，而在 $M[H]$ 中，$\tau_H : A \to B$ 是函数，却又有 $\tau_H(a) = b$ 并且 $\tau_H(a) = b'$，矛盾。这样，$\{Q(b) \mid b \in F(a)\}$ 就是 $\mathbb{P}$ 中的反链，由 ($\mathbb{P}$ 有可数反链性质)^M 以及 $Q \in M$，知 $(|\{Q(b) \mid b \in F(a)\}| \leq \aleph_0)^M$，故 $(|F(a)| \leq \aleph_0)^M$。 □

9.5.9. **定义** (1) 如果 $\mathbb{P} \in M$，称 $\mathbb{P}$ 是**保持基数**的当且仅当如果 G 是 M 上的 $\mathbb{P}$ 脱殊滤，则

$$\forall \beta \in o(M)((\beta \text{ 是基数})^M \leftrightarrow (\beta \text{ 是基数})^{M[G]})。 \tag{9.47}$$

(2) 如果 $\mathbb{P} \in M$，称 $\mathbb{P}$ 是**保持共尾**的当且仅当如果 G 是 M 上的 $\mathbb{P}$ 脱殊滤而 γ 是 M 中的基数，则

$$\mathrm{cf}(\gamma)^M = \mathrm{cf}(\gamma)^{M[G]}。 \tag{9.48}$$

所以，根据前面的讨论，为了证明 $\neg\mathbf{CH}$ 的相对一致性，我们需要验证给定的力迫是保持基数的。以下命题的目的是简化这种验证。

9.5.10. **引理** 令 $\mathbb{P} \in M$ 并且 G 是 M 上的 $\mathbb{P}$ 脱殊滤，

(1) 假设 (κ 是正则的)^M 蕴涵 (κ 是正则的)$^{M[G]}$，那么 $\mathbb{P}$ 保持共尾；

(2) 如果 $\mathbb{P}$ 保持共尾，则 $\mathbb{P}$ 保持基数；

(3) 如果 $\mathbb{P}$ 保持基数，则对任意基数 κ，$\kappa^M = \kappa^{M[G]}$。

证明. 见习题9.7.8。 □

9.5.11. **引理** 如果 $\mathbb{P} \in M$ 而 ($\mathbb{P}$ 有可数反链性质)^M，则 $\mathbb{P}$ 保持基数。

证明. 由引理9.5.10，我们只需证明

$$(\kappa \text{ 是正则的})^M \quad \Rightarrow \quad (\kappa \text{ 是正则的})^{M[G]}。 \tag{9.49}$$

反设 (9.49) 式不成立，即存在 $\kappa \in M$，(κ 是正则的 $)^M$，但 (κ 不是正则的 $)^{M[G]}$。因此存在 $\alpha < \kappa$，存在 $f \in M[G]$，$f : \alpha \to \kappa$ 是共尾映射 (在 $M[G]$ 中)。根据引理9.5.8，存在函数 $F \in M$ 满足：$F : \alpha \to \mathcal{P}(\kappa)$，$\forall \xi < \alpha(f(\xi) \in F(\xi))$ 并且 $\forall \xi < \alpha((|F(\xi)| \leq \omega)^M)$。取 $S = \bigcup_{\xi<\alpha} F(\xi)$，则 $S \in M$ 并且 (在 M 中) 是 κ 的无界子集。同时，S (在 M 中) 是 α 个可数集合的并，因此 $(|S| = |\alpha| < \kappa)^M$ (注意这里用到 (κ 是基数 $)^M$)，与 (κ 是正则的 $)^M$ 矛盾。 □

9.5.12. **定理** $\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC} + \neg\mathbf{CH})$。

证明. 考虑力迫 $\mathbb{P} = \mathrm{Func}((\aleph_2)^M \times \aleph_0, 2)$，则 $\mathbb{P}$ 有可数反链性质，因此保持基数，故 $(\aleph_2)^M = (\aleph_2)^{M[G]}$。根据引理9.5.4，$(2^{\aleph_0} \geq \aleph_2 > \aleph_1)^{M[G]}$。 □

以上定理表明，连续统的基数可以“不是” $\aleph_1$。随之而来的问题就是连续统的基数可以“是”什么，即如何确定连续统的值。由于力迫 $\mathrm{Func}(\kappa \times \omega, 2)$ 产生 $2^\omega \geq \kappa$ 的模型，因此自然的想法就是利用 M 中基数的幂为 $M[G]$ 中基数的幂找到一个上限，例如 ω_2，这样就能得到 $(2^\omega = \omega_2)^{M[G]}$。当然这需要新的技巧，其关键是找到一个统一的名字集合来命名 $M[G]$ 中的 ω 子集。

9.5.13. **定义** *假设 σ 是一个 $\mathbb{P}$ 名字，考虑具有如下形式的集合 τ：*

$$\tau = \bigcup \{\{\pi\} \times A_\pi \mid \pi \in \mathrm{dom}(\sigma) \wedge A_\pi \text{ 是 } \mathbb{P} \text{ 中的反链}\}。 \tag{9.50}$$

*则 τ 是 $\mathbb{P}$ 名字，称为 σ 的一个子集的***美名**。

9.5.14. **引理** *如果 $\mathbb{P} \in M$ 而 $\sigma, \mu \in M^{\mathbb{P}}$，则存在一个 σ 子集的美名 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ 使得：*

$$\mathbf{1} \Vdash (\mu \subseteq \sigma \to \mu = \tau)。 \tag{9.51}$$

证明. 任取 $\pi \in \mathrm{dom}(\sigma)$，令 $A_\pi \subseteq \mathbb{P}$ 为满足以下条件的最大子集：

(1)　$\forall p \in A_\pi(p \Vdash \pi \in \mu)$;

(2)　A_π 是 $\mathbb{P}$ 中的反链。

由力迫的可定义性以及 M 中的佐恩引理，$A_\pi \in M$，故 $\{A_\pi \mid \pi \in \mathrm{dom}(\sigma)\} \in M$。令 $\tau = \bigcup\{\{\pi\} \times A_\pi \mid \pi \in \mathrm{dom}(\sigma)\}$。以下证明对任何 $\mathbb{P}$ 脱殊滤 G，$\mu_G \subseteq \sigma_G \to \mu_G = \tau_G$。而这显然蕴涵命题的结论。

先证 $\mu_G \subseteq \tau_G$。任取 $x \in \mu_G$。由于 $\mu_G \subseteq \sigma_G$，故存在 $\pi \in \mathrm{dom}(\sigma)$，$x = \pi_G$。如果 $A_\pi \cap G \neq \emptyset$，则取 $p \in A_\pi \cap G$；这样，$(\pi, p) \in \tau$ 而 $p \in G$，所以 $x = \pi_G \in \tau_G$。如果 $A_\pi \cap G = \emptyset$，令 $q \in G$ 并满足 $\forall p \in A(p \perp q)$。取 $q' \in G$ 使得 $q' \Vdash \pi \in \mu$。如果取 $r \in G$ 为 $r \le q, r \le q'$，则 $A_\pi \cup \{r\}$ 满足 (1) 和 (2)，与 A_π 的最大性矛盾。

反过来，取 $x \in \tau_G$，存在 $p \in G$，$(\pi, p) \in \tau$ 并且 $x = \pi_G$。由 τ 的定义，$p \Vdash \pi \in \mu$，故 $x = \pi_G \in \mu_G$。 □

9.5.15. **引理** *假设力迫 $\mathbb{P}$ 在 M 中具有可数反链性质，$|\mathbb{P}| = \kappa \ge \aleph_0$，令 λ 为无穷基数，$\theta = \kappa^\lambda$，最后令 G 为 M 上的 $\mathbb{P}$ 脱殊滤，则在 $M[G]$ 中，$2^\lambda \le \theta$。*

证明. 在 M 中，$\mathbb{P}$ 的反链至多有 $\kappa^{\aleph_0}$ 个，而 $\mathrm{dom}(\check{\lambda})$ 的基数为 λ，所以 $\check{\lambda}$ 子集的美名至多有 $(\kappa^{\aleph_0})^\lambda = \kappa^\lambda = \theta$ 个。令 $\langle \tau_\alpha \mid \alpha < \theta \rangle$ 是 M 中这些美名的枚举，则存在函数 $f \in M[G]$，$\mathrm{dom}(f) = \theta$ 并且对任意 $\alpha \in \theta$，$f(\alpha) = \tau_{\alpha G}$。由引理 9.5.14，每个 λ 的子集都有一个美名，故 $(\mathcal{P}(\lambda))^{M[G]} \subseteq \mathrm{ran}(f)$，而 $|\mathrm{ran}(f)| \le \theta$，所以 $(2^\lambda \le \theta)^{M[G]}$。 □

9.5.16. **定理** *令 κ 为 M 中的无穷基数并满足 $(\kappa^{\aleph_0} = \kappa)^M$，如果 G 为 M 上的 $\mathrm{Func}(\kappa \times \aleph_0, 2)$ 脱殊滤，则 $(2^{\aleph_0} = \kappa)^{M[G]}$。*

证明. 应用引理9.5.15，取 $\lambda = \aleph_0$，$\theta = \kappa$，$\mathbb{P} = \mathrm{Func}(\kappa \times \aleph_0, 2)$，则引理的条件满足，故有 $(2^{\aleph_0} \le \kappa)^{M[G]}$。又注意到，这里的力迫同时满足引理9.5.4的条件，所以也有 $(2^{\aleph_0} \ge \kappa)^{M[G]}$。因此，$(2^{\aleph_0} = \kappa)^{M[G]}$。 □

9.5.17. **推论** $\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}) \to \mathrm{Con}(\mathbf{ZFC} + 2^{\aleph_0} = \aleph_2)$。

9.5.18. **注** 此处我们很想总结一下力迫法几个关节点：引理9.5.4，9.5.11和9.5.15。在引理9.5.4中，对任意序数 α，力迫 $\mathrm{Func}(\alpha \times \aleph_0, 2)$ 都能生成 $(2^{\aleph_0} \ge |\alpha|)$ 的脱殊模型。由于序数是对任意传递模型绝对的，所以此处没有遇到任何障碍。而当我们需要 α 是基数时，就必须要求新生成的模型保持基数，引理9.5.11 告诉我们只要对 $\mathbb{P}$ 稍加调整，令其满足 *c.c.c.* 时，其生成的脱殊模型就一定有这个性质。而 $\mathrm{Func}(\alpha \times \aleph_0, 2)$ 恰好是满足 *c.c.c.* 的。接

下来我们有了进一步的要求，就是要对 $2^{\aleph_0}$ 加一个上限，而引理 9.5.15告诉我们，只需对 κ^M 稍加调整，令其满足 $(\kappa^{\aleph_0}=\kappa)$ 即可。这套程式的力量在于，对任意 κ，只要满足这些条件，我们都能生成相应的模型。而满足条件的基数非常普遍：假设 M 满足 **GCH** （上一章我们已证明 **GCH** 与 **ZFC** 一致，所以这样的模型存在），则在 M 中，如果基数 κ 满足 $\mathrm{cf}(\kappa)>\aleph_0$，就有 $\kappa^{\aleph_0}=\kappa$ （见定理5.5.11），根据以上定理，也就有 $2^{\aleph_0}=\kappa$。例如：

9.5.19. 推论 $\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC})\rightarrow\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}+2^{\aleph_0}=\kappa)$，*其中 κ 可以是以下基数中的任何一个：*

$$\aleph_{12},\ \aleph_{89},\ \aleph_{2013},\ \aleph_{\aleph_1},\cdots。$$

证明. 假设 $\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC})$，我们已知这蕴涵着 $\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}+\mathbf{GCH})$。令 M 为 $\mathbf{ZFC}+\mathbf{GCH}$ 的可数传递模型，取力迫 $\mathbb{P}=\mathrm{Func}(\kappa\times\aleph_0,2)$，其中 $\kappa=\aleph_{12}$，$\aleph_{89}$，$\aleph_{2013}$ 或 $\aleph_{\aleph_1}$ 等等，同时假设 G 是 $\mathbb{P}$ 脱殊滤。因为 **GCH** 在 M 中成立，所以 $\kappa^{\aleph_0}=\kappa$，所以根据定理 9.5.16，有 $(2^{\aleph_0}=\kappa)^{M[G]}$，即，$\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC})\rightarrow\mathrm{Con}(\mathbf{ZFC}+2^{\aleph_0}=\kappa)$。 □

9.6 CH + ¬GCH 的相对一致性

本节的结果可以看作是应用力迫方法的一个例子。我们对上一节的科恩力迫稍加推广，不再要求从 I 到 J 的函数是有穷的，而是考虑更大的基数。除非特别说明，M 总是表示 **ZFC** 的可数传递模型。

从独立性证明的角度来看，本节的结果是一种加强。我们在上一节构造了 **CH** 在其中不成立的模型，自然地，**GCH** 在这些模型中也不成立。在本节中我们打算更“细致”一些，构造一个模型，使得 **CH** 成立，但在后面某处破坏 **GCH**，令其不成立。

本节也是对整个力迫思想的一个复习，多数命题都对应着上一节的某个命题，其证明也是稍加调整，这样的安排有助于读者尽快掌握力迫的技术。

9.6.1. **定义** 对任意基数 λ，令

$$\begin{aligned}\mathrm{Func}_\lambda(I,J)=\{p\mid |p|<\lambda\wedge p\text{ 是函数}\\ \wedge\mathrm{dom}(p)\subseteq I\wedge\mathrm{ran}(p)\subseteq J\},\end{aligned}\tag{9.52}$$

则相应的力迫为 $(\mathrm{Func}_\lambda(I,J),\supseteq,\emptyset)$。一般情况下我们只用 $\mathrm{Func}_\lambda(I,J)$ 表示这个力迫。

9.6.2. **注** 如果 $\lambda>\omega$，则 $\mathrm{Func}_\lambda(I,J)$ 不再是绝对的。显然，如果 I 无穷而 J 非空，则 $\mathrm{Func}_\lambda(I,J)$ 是不可数的，但 $(\mathrm{Func}_\lambda(I,J))^M$ 是可数的。另外一个变化是这个力迫可能不再有可数反链性质。例如，如果 $\lambda=\aleph_1$，$|J|=2$，则容易找到基数为 $2^{\aleph_0}$ 的反链。为此我们引入以下弱的反链性质。

9.6.3. **定义** 给定基数 κ，如果偏序集 $\mathbb{P}$ 的任意反链的基数都小于 κ，就称 $\mathbb{P}$ 具有κ-**反链性质**，记作 κ-*c.c.*。

所以，*c.c.c.* 就是 $\aleph_1$-*c.c.*。针对 κ-反链性质，我们需要以下更一般的 Δ-系统引理。

9.6.4. **广义 Δ-系统引理** 令 λ,κ 是（无穷）正则基数并且 $\kappa>\lambda$。同时假设对任意 $\alpha<\kappa$，都有 $|\alpha^{<\lambda}|<\kappa$。对任意集合 $\mathcal{A}$，如果 $|\mathcal{A}|=\kappa$，但对任意 $A\in\mathcal{A}$，$|A|<\lambda$，则存在 $\mathcal{A}_0\in[\mathcal{A}]^\kappa$，$\mathcal{A}_0$ 是 Δ-系统。即：存在集合 R 使得对任意 $A,B\in\mathcal{A}_0$，如果 $A\neq B$，则 $A\cap B=R$，R 称为 $\mathcal{A}_0$ 的**根**。

证明. 设 $\mathcal{A}=\{A_\alpha\mid\alpha<\kappa\}$。因为 $|\bigcup\mathcal{A}|\leq\kappa\times\lambda=\kappa$，所以不妨设每个 A_α 都是 κ 的子集。

回忆命题6.2.16中的 $E^\kappa_\lambda=\{\alpha<\kappa\mid\mathrm{cf}(\alpha)=\lambda\}$，它是 κ 的一个平稳子集。定义 E^κ_λ 上的函数 f，使得 $f(\alpha)=\sup(\alpha\cap A_\alpha)$。由于对任意 $\alpha\in E^\kappa_\lambda$，$|A_\alpha|<\lambda=\mathrm{cf}(\alpha)$，所以 $\sup(\alpha\cap A_\alpha)<\alpha$，即 f 是退缩函数。应用福道尔定理6.2.20，存在 $\gamma<\kappa$，

$$T=\{\alpha\in E^\kappa_\lambda\mid\sup(\alpha\cap A_\alpha)<\gamma\}\tag{9.53}$$

是平稳集。定义集合

$$D=\{\alpha<\kappa\mid\forall\beta<\alpha(\sup(A_\beta)<\alpha)\},\tag{9.54}$$

则 D 是无界闭集（见推论6.2.12），因此 $T_0=T\cap D$ 是平稳集。对任意 $\alpha,\beta\in T_0$，不妨设 $\alpha<\beta$，由于 $\sup(A_\alpha)<\beta$，以及 $\sup(\beta\cap A_\beta)<\gamma$，所

以 $\sup(A_\alpha \cap A_\beta) < \gamma$，因此 $A_\alpha \cap A_\beta \subseteq \gamma$。又知对每个 α，$|A_\alpha| < \gamma$，所以取 $A \in [\gamma]^{<\lambda}$，令 $T_A = \{\beta \in T_0 \mid A_\beta \cap \gamma = A\}$，则

$$T_0 = \bigcup_{A \in [\gamma]^{<\lambda}} T_A。 \tag{9.55}$$

但是，根据假设，$|[\gamma]^{<\lambda}| < \kappa$，而 κ 上的非平稳理想是 κ-完全的，所以，总存在一个 $R \in |[\gamma]^{<\lambda}|$ 使得 T_R 是平稳集。令 $\mathcal{A}_0 = \{A_\alpha \mid \alpha \in T_R\}$，则 $|\mathcal{A}_0| = \kappa$，并且是以 R 为根的 Δ-系统。 □

显然，引理9.5.6是 $\lambda = \aleph_0$，$\kappa = \aleph_1$ 的特殊情况。注意，在本节中，我们提到 Δ-系统引理都是指广义的。类似于引理9.5.7，我们有：

9.6.5. **引理** *对任意基数 λ，$\mathrm{Func}_\lambda(I, J)$ 有 $(|J|^{<\lambda})^+$-反链性质。*

证明. 令 $\kappa = (|J|^{<\lambda})^+$。如果 J 是空集或是单点集，则命题是平凡的。假设 $|J| \geq 2$，则 $\kappa > \lambda$ 并且是正则基数（因为所有后继基数都是正则的）。任取 $X \subseteq \mathrm{Func}_\lambda(I, J)$ 且 $|X| = \kappa$。在以下证明中不妨设 λ 是正则的。如果不是，则一定存在 $\lambda_0 < \lambda$ 使得 $X_0 = \{p \in X \mid |p| \leq \lambda_0\}$ 的基数为 κ，则我们可用 X_0 取代 X，用 λ_0^+ 取代 λ。

令 $\mathcal{A} = \{\mathrm{dom}(p) \mid p \in X\}$，则由 Δ-系统引理9.6.4，存在 Δ-系统 $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$，令 R 为根，定义集合 $Y = \{p \in X \mid \mathrm{dom}(p) \in \mathcal{A}_0\}$，由于 $|J^R| < \kappa$（后者是 $(|J|^{<\lambda})^+$），所以存在 $p, q \in Y$，$p \neq q$，但是 $p \restriction R = q \restriction R$，即 p, q 是相容的函数所以 $p \cup q$ 是一个函数（见练习2.2.9），它属于 X 并且是 p, q 的共同扩张，所以 X 不是反链。 □

9.6.6. **引理** *假设 $\mathbb{P} \in M$，(κ 是不可数基数$)^M$，并且 ($\mathbb{P}$ 有 κ-反链性质$)^M$，G 为 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤。令 $A, B \in M$，$f : A \to B$ 属于 $M[G]$，则存在 M 中的映射 $F : A \to \mathcal{P}(B)$，$\forall a \in A(f(a) \in F(a))$ 并且 $\forall a \in A((|F(a)| \leq \kappa)^M)$。*

证明. 与引理9.5.8类似，我们简述如下：

取 $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ 为函数 f 的名字。由力迫定理，存在 $p \in G$ 使得 $p \Vdash \tau$ 是 $\check{A}$ 到 $\check{B}$ 的函数。定义

$$F(a) = \left\{ b \in B \mid \exists q \leq p (q \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}) \right\}, \tag{9.56}$$

则 $F \in M$，并且，如果 $b = f(a)$，则 $b \in F(a)$。

在 M 中应用选择公理，定义函数 $Q: F(a) \to \mathbb{P}$，使得对任意 $b \in F(a)$，$Q(b) \leq p_0$ 并且 $Q(b) \Vdash \tau(\check{a}) = \check{b}$，则 $\{Q(b) \mid b \in F(a)\}$ 是 $\mathbb{P}$ 中的反链，由 ($\mathbb{P}$ 有 κ-反链性质)^M 以及 $Q \in M$，知 $(|\{Q(b) \mid b \in F(a)\}| \leq \kappa)^M$，故 $(|F(a)| \leq \kappa)^M$。 □

类似地，我们定义“保持 $\geq \kappa$-基数”和“保持 $\geq \kappa$-共尾”的概念。

9.6.7. **定义** 令 $\mathbb{P} \in M$ 为力迫，(κ 是基数)^M，则

(1) $\mathbb{P}$ 是**保持 $\geq \kappa$-基数**的当且仅当如果 G 是 M 上的 $\mathbb{P}$ 脱殊滤，并且 $\kappa \leq \beta \leq o(M)$，则

$$(\beta \text{ 是基数})^M \leftrightarrow (\beta \text{ 是基数})^{M[G]}; \tag{9.57}$$

(2) $\mathbb{P}$ 是**保持 $\geq \kappa$-共尾**的当且仅当如果 G 是 M 上的 $\mathbb{P}$ 脱殊滤而 γ 是 M 中的基数，并且 $\mathrm{cf}(\gamma)^M \geq \kappa$，则

$$\mathrm{cf}(\gamma)^M = \mathrm{cf}(\gamma)^{M[G]}。 \tag{9.58}$$

类似于引理9.5.10，读者可以证明：

9.6.8. **引理** 令 $\mathbb{P} \in M$，G 是 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤，并且 (κ 是正则基数)^M，则

(1) 对任意 $\beta < o(M)$ 并且 $\beta \geq \kappa$，假设 (β 是正则的)^M 蕴涵 (β 是正则的)$^{M[G]}$，那么 $\mathbb{P}$ 保持 $\geq \kappa$-共尾；

(2) 如果 $\mathbb{P}$ 保持 $\geq \kappa$-共尾，则 $\mathbb{P}$ 保持 $\geq \kappa$-基数。

9.6.9. **引理** 如果 $\mathbb{P} \in M$，(κ 是正则基数)^M，并且 ($\mathbb{P}$ 有 κ-反链性质)^M，则 $\mathbb{P}$ 保持 $\geq \kappa$-共尾和 $\geq \kappa$-基数。

证明. 类似于引理9.5.11。 □

虽然有了引理9.6.9，但保持小于 κ 的基数依然是一个问题。这需要对 $\mathbb{P}$ 有更多的要求。回忆定义2.2.11，Y^X 表示 X 到 Y 的所有函数的集合。对任意序数 α,β，我们在以下引理中也令 β^α 表示集合 $\{f \mid f: \alpha \to \beta \text{ 是函数}\}$，而不是序数的幂运算。

9.6.10. 引理 假设 $\omega < \lambda < o(M)$，并且对任意序数 $\alpha < \lambda$，$\lambda^\alpha \cap M = \lambda^\alpha \cap M[G]$，则

(1) 对任意极限序数 $\gamma \leq \lambda$，都有 $\mathrm{cf}(\gamma)^M = \mathrm{cf}(\gamma)^{M[G]}$；

(2) 对任意 $\beta \leq \lambda$，$(\beta$ 是基数 $)^M$ 当且仅当 $(\beta$ 是基数 $)^{M[G]}$。

证明. 根据共尾和基数的定义易证。例如，如果 β 不是基数，则存在 $\alpha < \beta$ 使得 $f : \alpha \to \beta$ 是双射。而题设告诉我们这样的函数属于 M 当且仅当它属于 $M[G]$。 □

9.6.11. 定义 令 $\mathbb{P}$ 是力迫而 λ 是基数，称 $\mathbb{P}$ 是**λ-封闭的**，如果它满足以下条件：

$$\text{对任意 } \alpha < \lambda\text{，}\mathbb{P} \text{ 中长度为 } \alpha \text{ 的下降链 } (p_\xi \mid \xi < \alpha) \text{ 都有下界，} \tag{9.59}$$

即存在 $q \in \mathbb{P}$ 使得对任意 $\xi < \alpha$，$q \leq p_\xi$。

9.6.12. 引理 如果 λ 是正则的，则 $\mathrm{Func}_\lambda(I, J)$ 是 λ-封闭的。

证明. 显然，令 $q = \bigcup_{\xi<\alpha} p_\xi$ 即可。 □

9.6.13. 引理 假设 $(\mathbb{P}$ 是 λ-封闭的$)^M$，同时假设 $A, E \in M$ 且 $(|A| < \lambda)^M$，则如果 $f : A \to E$ 是 $M[G]$ 中的函数，那么 f 也属于 M。

证明. 令 $\delta = |A|^M$。不妨假设 $A = \delta$，因为如果不是这样，那么令 $g : \delta \to A$ 是双射，如果 $f \circ g : \delta \to E$ 属于 M，则 $f : A \to E$ 也属于 M。

令 τ 是 f 的名字。以下我们证明：如果 $p \Vdash \tau$ 是 $\check{\delta}$ 到 $\check{E}$ 的函数，则存在函数 $h : \delta \to E$ 和力迫条件 $q \leq p$ 使得 $q \Vdash \tau = \check{h}$。

在 M 中应用选择公理递归定义序列 $\langle p_\xi \mid \xi \leq \delta \rangle$：

(1) $p_0 = p$；

(2) $p_{\xi+1}$ 满足以下条件：$p_{\xi+1} \leq p_\xi$ 并且存在 $e_\xi \in E$ 使得 $p_{\xi+1} \Vdash \tau(\check{\xi}) = \check{e}_\xi$；（请读者证明 p_ξ 和 e_ξ 存在。）

(3) 如果 $\eta < \delta$ 是极限序数，则取 p_η 使得对任意 $\xi < \eta$，$p_\eta \leq p_\xi$。这样的 p_η 存在是因为 $\mathbb{P}$ 是 λ-封闭的。

定义 $h : \delta \to E$ 为：$h(\xi) = e_\xi$，同时令 $q = p_\delta$。因为对每一 $\xi \in \delta$，

$$q \Vdash \check{h}(\check{\xi}) = \tau(\check{\xi}), \tag{9.60}$$

所以 $q \Vdash \check{h} = \tau$。 □

9.6.14. **定理** 假设 $\mathbb{P} = \mathrm{Func}_\lambda(I, J) \in M$，$(\lambda \geq \aleph_0$ 是正则基数 $)^M$，$(2^{<\lambda} = \lambda)^M$，并且 $(|J| \leq \lambda)^M$，则 $\mathbb{P}$ 保持共尾并且保持基数。

证明. 如果 $\beta \leq \lambda$，则由于 $(\mathbb{P}$ 是 λ-封闭的 $)^M$，根据引理9.6.13，$\mathbb{P}$ 满足引理9.6.10的条件，所以命题成立。如果 $\beta > \lambda$，则由于 $\mathbb{P}$ 有 $(\lambda^+$-反链性质 $)^M$，所以根据引理9.6.9，$\mathbb{P}$ 保持共尾和基数。 □

9.6.15. **定理** 假设在 M 中，$\mathbb{P} = \mathrm{Func}_\lambda(\kappa \times \lambda, 2)$，其中 κ,λ 是基数并且 $\kappa > \lambda \geq \aleph_0$，$\lambda$ 是正则的，$\kappa^\lambda = \kappa$ 并且 $2^{<\lambda} = \lambda$，则 $\mathbb{P}$ 保持共尾和基数，而且在 $M[G]$ 中，$2^\lambda = \kappa$。

证明. 由定理9.6.14，$\mathbb{P}$ 保持共尾和基数。

在 $M[G]$ 中，令 $g = \bigcup G$，则 $g : \kappa \times \lambda \to$ 是定义在 $\kappa \times \lambda$ 上的函数。对每一 $\alpha < \kappa$，令 $h_\alpha : \lambda \to 2$ 为如下定义的函数：对任意 $\xi \in \lambda$，$h_\alpha(\xi) = g(\alpha, \xi)$。这样，$(h_\alpha \mid \alpha < \kappa)$ 就是 2^λ 中元素的长度为 κ 的序列。如果 $\alpha \neq \beta$，则

$$E_{\alpha,\beta} = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists\xi((\alpha,\xi), (\beta,\xi))\} \in \mathrm{dom}(p) \wedge p(\alpha,\xi) \neq p(\beta,\xi) \tag{9.61}$$

是稠密集，所以 $\langle h_\alpha \mid \alpha < \kappa\rangle$ 是一一序列，故 $(2^\lambda \geq \kappa)^{M[G]}$。

回到 M 中，$\mathbb{P}$ 的任一反链的基数都不大于 λ，而 $|\mathbb{P}| = \kappa^{<\lambda} = \kappa$，所以至多有 $\kappa^\lambda = \kappa$ 个反链，所以至多有 κ 个 λ 子集的美名。所以 $(2^\lambda \leq \kappa)^{M[G]}$。(参见引理9.5.15。) □

9.6.16. **定理** 假设 M 是 **ZFC** 的可数传递模型，则分别存在 M 的脱殊扩张满足以下命题：

(1) $\mathbf{CH} \wedge 2^{\aleph_1} = \aleph_8 \wedge \forall\kappa \geq \aleph_1(2^\kappa = \max(\kappa^+, \aleph_8))$；

(2) $\mathbf{CH} \wedge 2^{\aleph_1} = \aleph_5 \wedge 2^{\aleph_2} = \aleph_{\omega+1} \wedge \forall\kappa \geq \aleph_2(2^\kappa = \max(\kappa^+, \aleph_{\omega+1}))$；

(3) $2^{\aleph_0} = \aleph_3 \wedge 2^{\aleph_1} = \aleph_5 \wedge 2^{\aleph_2} = \aleph_7$。

证明. 不妨假设 $M \models \mathbf{GCH}$。

(1) 令 $\mathbb{P} = \mathrm{Func}_{\aleph_1}(\aleph_8 \times \aleph_1, 2) \in M$，$G$ 为 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤。由定理9.6.15，立得 $(2^{\aleph_1} = \aleph_8)^{M[G]}$。又 $\mathbb{P}$ 是 $\aleph_1$-封闭的，所以由引理9.6.13，$\{0,1\}^{\aleph_0} \cap M = \{0,1\}^{\aleph_0} \cap M[G]$。因为 **CH** 在 M 中成立，所以 **CH** 在 $M[G]$ 中成立。假设 $\kappa > \aleph_1$，$(2^\kappa \geq \max(\aleph_8, \kappa^+))^{M[G]}$ 是显然的。而另一方面，由于 **GCH** 在 M 中成立，所以 $((\aleph_8)^\kappa = \max(\aleph_8, \kappa^+))^M$，参见定理5.5.11。由定理9.5.15，$(2^\kappa \leq \max(\aleph_8, \kappa^+))^{M[G]}$。

(2) 令 $\mathbb{P} = \text{Func}_{\aleph_2}(\aleph_{\omega+1} \times \aleph_2, 2) \in M$，$G$ 是脱殊滤，$N = M[G]$，则与（1）类似方法可证：

$$N \models \mathbf{CH} \wedge 2^{\aleph_1} = \aleph_2 \wedge 2^{\aleph_2} = \aleph_{\omega+1} \\ \wedge \forall\kappa \geq \aleph_2(2^\kappa = \max(\kappa^+, \aleph_{\omega+1}))。 \tag{9.62}$$

现在取 N 为基始模型（它是 **ZFC** 的可数传递模型)。令 $\mathbb{Q} = \text{Func}_{\aleph_1}(\aleph_5 \times \aleph_1, 2) \in N$。

(a) 取 $\lambda = (\aleph_1)^M = (\aleph_1)^N$，$\kappa = (\aleph_5)^M = (\aleph_5)^N$。在 M 中，由于 **GCH** 成立，所以 $\kappa^\lambda = \kappa$ 并且 $2^{<\lambda} = \lambda$。又由于 ($\mathbb{P}$ 是 $\aleph_2$-封闭的 $)^M$，所以在 N 中也有 $\kappa^\lambda = \kappa$ 并且 $2^{<\lambda} = \lambda$。这样，应用定理9.6.15，$\mathbb{Q}$ 保持基数，并且，如果 H 是 N 上的 $\mathbb{Q}$ 脱殊滤，则 $N[H] \models 2^{\aleph_1} = \aleph_5$。

(b) 由于 $N \models \mathbf{CH}$，而 $\{0,1\}^{\aleph_0} \cap N = \{0,1\}^{\aleph_0} \cap N[H]$，所以 $N[H] \models \mathbf{CH}$。

(c) 由于 $N \models 2^{\aleph_2} = \aleph_{\omega+1}$，而 $N \subseteq N[H]$ 且它们的基数相同，所以 $N[H] \models 2^{\aleph_2} \geq \aleph_{\omega+1}$。另一方面，据引理9.6.5，在 N 中，$\mathbb{Q}$ 是 $\aleph_2$-*c.c.* 的。而 $|\mathbb{Q}| = (\aleph_5)^{\aleph_1} = \aleph_5$，所以在 N 中，$\aleph_2$ 子集的美名至多有 $(\aleph_5)^{\aleph_2}$ 个。又由于 $(2^{\aleph_2} = \aleph_{\omega+1})^N$，所以根据基数算术知识，$(\aleph_5)^{\aleph_2} = \aleph_{\omega+1}$，即 $(2^{\aleph_2} \leq \aleph_{\omega+1})^{N[H]}$。

(d) 最后，对于 $\kappa \geq \aleph_2$，用与 (c) 类似的计算 N 中美名的方法可以证明 $\forall\kappa \geq \aleph_2(2^\kappa = \max(\kappa^+, \aleph_{\omega+1}))$。

(3) 首先，令 $\mathbb{P} = \text{Func}_{\aleph_2}(\aleph_7 \times \aleph_2, 2) \in M$，如果 G 是 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤，令 $M_1 = M[G]$，则

$$M_1 \models 2^{\aleph_0} = \aleph_1 \wedge 2^{\aleph_1} = \aleph_2 \wedge 2^{\aleph_2} = \aleph_7。 \tag{9.63}$$

接下来以 M_1 为基始模型，令 $\mathbb{P}_1 = \text{Func}_{\aleph_1}(\aleph_5 \times \aleph_1, 2) \in M_1$，如果 G_1 是 M_1 上的 $\mathbb{P}_1$-脱殊滤，令 $M_2 = M_1[G_1]$，则

$$M_2 \models 2^{\aleph_0} = \aleph_1 \wedge 2^{\aleph_1} = \aleph_5 \wedge 2^{\aleph_2} = \aleph_7。 \tag{9.64}$$

最后，令 $\mathbb{P}_2 = \text{Func}_{\aleph_0}(\aleph_3 \times \aleph_0, 2) \in M_2$，如果 G_2 是 M_2 上的 $\mathbb{P}_2$-脱殊滤，令 $M_3 = M_2[G_2]$，则

$$M_3 \models 2^{\aleph_0} = \aleph_3 \wedge 2^{\aleph_1} = \aleph_5 \wedge 2^{\aleph_2} = \aleph_7。 \tag{9.65}$$

□

9.7 习题

我们总是假设 M 是 **ZFC** 的可数传递模型。

9.7.1. 令 $\sigma = (\emptyset, q)$，$\tau = \{(\emptyset, p), (\sigma, r)\}$。根据 p, q, r 是否属于 G 的不同情况分别计算 σ_G，τ_G。

9.7.2. 假设 τ 是名字，G 是滤，而 $a = \tau_G$，定义

$$\pi = \{(\rho, p) \mid \exists(\sigma, q) \in \tau \exists r((\rho, r) \in \sigma \wedge p \leq r \wedge p \leq q)\}。$$

如果 $b = \pi_G$，则 $\bigcup a = b$，因此并集公理在 $M[G]$ 中成立。注意，我们并没有要求 G 是脱殊的。

9.7.3. 定义一个力迫 $\mathbb{P}$，使得存在公式 $\varphi(x)$，$\mathbb{P}$-名字 τ，和不同的 $\mathbb{P}$-脱殊滤 G, H，满足：$M[G] = M[H]$，并且，$M[G] \vDash \varphi(\tau_G)$ 而 $M[H] \vDash \neg\varphi(\tau_H)$

9.7.4. $p \in \mathbb{P}$ 称为一个**原子**当且仅当

$$\neg\exists q, r \in \mathbb{P}(q \leq p \wedge r \leq p \wedge q \perp r)。$$

显然 $\mathbb{P}$ 是无原子的（定义9.2.3当且仅当 $\mathbb{P}$ 没有原子。证明：如果 $\mathbb{P} \in M$ 且 p 是 $\mathbb{P}$ 的原子，则存在一个滤 $G \in M$ 使得 $p \in G$ 且 G 与任何 $\mathbb{P}$ 的稠密子集相交不空。

9.7.5. 令 $\mathbb{P} = \text{Func}(\omega, 2)$。证明存在一个滤 $G \subseteq \mathbb{P}$，使得不存在传递 N 满足：$M \subseteq N$，$G \in N$，$N \vDash \mathbf{ZF} - \text{Pow}$ 并且 $o(N) = o(M)$。

9.7.6. 对任意力迫 $\mathbb{P} \in M$，任意语句 φ, ψ（不含自由变元），以下命题成立：

(1) 不存在 p 使得 $p \Vdash \varphi \wedge \neg\varphi$；

(2) 如果 φ, ψ 是逻辑等值的，则 $p \Vdash \varphi$ 当且仅当 $p \Vdash \psi$；

(3) $p \Vdash \varphi \wedge \psi$ 当且仅当 $p \Vdash \varphi$ 并且 $p \Vdash \psi$；

(4) $p \Vdash \neg\varphi$ 当且仅当 $\neg\exists q \leq p(q \Vdash \varphi)$；$p \Vdash \varphi$ 当且仅当 $\neg\exists q \leq p(q \Vdash \neg\varphi)$；

(5)　$p \Vdash \varphi \to \psi$ 当且仅当 $\neg q \leq p(q \Vdash \varphi \wedge q \Vdash \neg\psi)$;

(6)　$p \Vdash \varphi \vee \psi$ 当且仅当 $\{q \leq p \mid q \Vdash \varphi \vee q \Vdash \psi\}$ 是在 p 下稠密的;

(7)　$p \Vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ 当且仅当 $\neg\exists q \leq p(q \Vdash \varphi \wedge q \Vdash \neg\psi)$ 并且 $\neg\exists q \leq p(q \Vdash \neg\varphi \wedge q \Vdash \psi)$。

9.7.7. 对任意力迫 $\mathbb{P} \in M$ 和公式 $\varphi(x)$,

(1)　$p \Vdash \forall x\varphi(x)$ 当且仅当对任意 τ，$p \Vdash \varphi(\tau)$;

(2)　$p \Vdash \exists x\varphi(x)$ 当且仅当 $\{q \leq p \mid \exists\tau \in M^{\mathbb{P}}(q \Vdash \varphi(\tau)\}$ 是 p 下稠密的。

9.7.8. 证明引理9.5.10，即，令 $\mathbb{P} \in M$ 并且 G 是 M 上的 $\mathbb{P}$-脱殊滤,

(1)　假设 (κ 是正则的 $)^M$ 蕴涵 (κ 是正则的$)^{M[G]}$，那么 $\mathbb{P}$ 保持共尾;

(2)　如果 $\mathbb{P}$ 保持共尾，则 $\mathbb{P}$ 保持基数;

(3)　如果 $\mathbb{P}$ 保持基数，则对任意基数 κ，$\kappa^M = \kappa^{M[G]}$。

9.7.9. 假设 $\mathbb{P}, J \in M$，($\mathbb{P}$ 是可数的 $)^M$，而 $(|J| = \aleph_1)^M$。如果 ($E \subseteq J \wedge E$ 是不可数的$)^{M[G]}$，则存在 $E' \in M$ 使得 ($E' \subseteq E \wedge E'$ 是不可数的$)^M$。

9.7.10. 令 $\mathbb{P} = \text{Func}(\kappa,\lambda) \in M$ 并且 $(\aleph_0 \leq \kappa < \lambda)^M$。证明:

(1)　λ 在 $M[G]$ 中是可数的;

(2)　M 中大于 λ 的基数都在 $M[G]$ 中保持;

(3)　如果 $M \models \mathbf{GCH}$，则 $M[G] \models \mathbf{GCH}$。

9.7.11. 利用习题9.7.10，找到适当的 $M, \mathbb{P}$ 使得对任意 $\alpha \geq 1$，$M[G] \models \mathbf{GCH} + \aleph_\alpha = (\aleph_{5+\alpha})^{\mathbf{L}}$。

9.7.12. 假设在 M 中，λ 是奇异基数，$|I| \geq \lambda$，$|J| \geq 2$，$\mathbb{P} = \text{Func}_\lambda(I, J)$，则在 $M[G]$ 中，λ 不是基数。

参考文献

[1] Krzysztof Ciesielski. *Set Theory for the Working Mathematician*, volume 39 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[2] Herbert B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic*. Academic Press, New York, 1972.

[3] Herbert B. Enderton. *Elements of Set Theory*. Academic Press, Inc., New York, 1977.

[4] William Ewald, editor. *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Clarendon Press, Oxford, 1999.

[5] Karel Hrbacek & Thomas Jech. *Introduction to Set Theory*, volume 220 of *Monographs and textbooks in pure and applied mathematics*. Marcel Dekker, New York, 3rd edition, 1999.

[6] Thomas Jech. *The Axiom of Choice*. North-Holland, Amsterdam, 1973.

[7] Thomas Jech. *Set Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, the third millennium edition, 2002.

[8] Kenneth Kunen. *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, volume 102 of *Studies in Logic and The Foundations of Mathematics*. North Holland, Amsterdam, 1980.

[9] Kenneth Kunen. *Set Theory*, volume 34 of *Studies in Logic: Mathematical Logic and The Foundations of Mathematics*. College Publications, 2011.

[10] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis (Third Edition)*. 机械工业出版社, 北京, 2004.

[11] Micheal Holz & Edmund Weitz & Karten Steffens. *Introduction to Cardinal Arithmetic.* Birkhäuser Verlag, Basel · Boston · Berlin, 2010.

[12] H.-D. Ebbinghaus& J. Flum & W. Thomas. *Mathematical Logic.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[13] Ernst Zermelo. Investigations in the Foundations of Set Theory I. **Math. Ann.**, 59:514–516, 1908.

索引

$\mathbf{AC}$, 11, 81, 82
$\aleph_\alpha$, 94
ω_α, 94
$\mathrm{cl}(\mathbf{X}, x, \boldsymbol{R})$, 159
$S \circ R$, 18
$X \cap Y$, 8
$X \cup Y$, 9
$X \times Y$, 17
$\mathbf{CH}$, 100
$\bigcap X$, 8
$\bigcup X$, 9
$\mathrm{cl}_G(M)$, 184
$\mathrm{cf}(\alpha)$, 101
$\mathrm{Con}(T)$, 137
$|A|$, 92
c.c.c., 224
Δ-系统引理, 224
Δ_0 公式, 151
$\triangledown_{\alpha<\kappa}$, 127
$\triangle_{\alpha<\kappa}$, 127
$\mathrm{Def}(M)$, 183, 189
$\mathrm{dom}(R)$, 17
广义 Δ-系统引理, 230
$[x]_\sim$, 24
Y^X, 21
$\mathrm{Func}(I, J)$, 210, 223
$\mathrm{Func}_\lambda(I, J)$, 230
$f : X \to Y$, 20
$p \Vdash^* \psi$, 215
$p \Vdash \varphi$, 214
$M[G]$, 212
$\mathbf{GCH}$, 100
H_κ, 171
$\mathcal{H}$, 139
$\mathcal{H}(S)$, 139
$\mathbb{Z}$, 47
$\bigoplus_{i\in I} \kappa_i$, 104
$\bigotimes_{i\in I} \kappa_i$, 104
id_X, 20
$\inf(X)$, 26
$\emptyset$, 7
$\mathbf{L}$, 191
$\mathbf{L}(A)$, 201
$\mathbf{L}[A]$, 202
$M \cong N$, 138
$M \equiv N$, 137
$M \prec N$, 138
$X - Y$, 8
$\kappa \otimes \lambda$, 96
$\mu^*(T)$, 86
$M^{\mathbb{P}}$, 212
$\mathbf{N}$, 34
(a, b), 16
$\mathbf{On}$, 69
ω, 10
$o(M)$, 206
$(X, \leq)$, 25
$\mathcal{P}(X)$, 9

κ^λ, 98
$\mathrm{pred}_n(\mathbf{X}, x, \boldsymbol{R})$, 159
$\prod_{i\in I} X_i$, 22
$X/\sim$, 24
$R(x, y)$, 17
$R[X]$, 18
R^{-1}, 18
$R^{-1}[Y]$, 18
$\mathbb{Q}$, 49
$\mathbb{R}$, 52
$\mathrm{ran}(R)$, 17
$\mathrm{rank}(x)$, 141
$\mathrm{rank}(x, \mathbf{X}, \boldsymbol{R})$, 160
$\mathrm{rank}_{\mathbf{L}}(x)$, 192
φ^M, 146
$f \upharpoonright A$, 21
$S(x)$, 10
$X \subseteq Y$, 9
$\mathbf{M} \vDash T$, 137, 147
SCH, 112
SCH′, 112
$\kappa \oplus \lambda$, 95
$\sup(X)$, 26
x^+, 10
$\mathrm{trcl}(x)$, 144
V_α, 71, 140
V, 8
$\mathrm{val}(\tau, G)$, 211
$0\mathrm{v}\tau_G$, 211
$W[a]$, 62
WF, 71, 140
ZF, 12
ZFC, 12
ZF$^-$, 140

$X \triangle Y$, 13
$X \subset Y$, 9

不可数的, 44
不可达基数, 103
不相容的, 209
伯恩斯坦公式, 108
保持 $\geq \kappa$-共尾, 232
保持 $\geq \kappa$-基数, 232
保持共尾, 226
保持基数, 226
并, 9
并集公理, 9
贝茨函数, 116
闭函数, 83
闭包, 83
闭集, 83, 124

传递的, 23, 65
传递闭包, 144
初等子模型, 138
初等嵌入, 138
初等等价, 137
存在公理, 6
层垒的谱系, 141
差, 8
稠密的, 50, 208
超滤, 122
超滤存在定理, 123
超穷归纳原理, 69
超穷递归定理, 70

单射, 21
单点集, 8
定义域, 17
对偶的, 121
对称差, 13
对称的, 23
对角线交, 127
对角线并, 127

德摩根律, 13
戴德金分割, 52
戴德金无穷, 46
戴德金有穷, 46
第二可数的, 83
等价的, 23
等价类, 24
等势, 42
等同函数, 20
退缩函数, 130
递归可枚举的, 4
递归定理, 38
递归的, 4

二元关系, 17

p 力迫 φ, 214
分离公理模式, 6
分配律, 13
反链, 224
复合, 18
弗雷歇滤, 120
弗雷歇理想, 121
福道尔定理, 130
范式, 184
覆盖, 84
非平稳理想, 128

公理, 4
共尾, 101
共尾映射, 101
古德斯坦定理, 80
哥德尔运算, 184
哥德尔闭包, 184
归纳原理, 34
归纳集, 34
根, 224

鸽笼原理, 44

函数, 20
划分, 24
后继, 10, 66
后继基数, 94
后继序数, 66
哈特格斯数, 69
广义豪斯道夫公式, 108
豪斯道夫公式, 107
豪斯道夫极大链条件, 82

交, 8
交换律, 12
吉洪诺夫定理, 84
吉莫尔函数, 110
均匀超滤, 132
基数, 92
基础公理, 10
局部同构, 51
极大元, 26
极大滤, 120
极小元, 26
极限基数, 94
极限序数, 66
极限点, 124
积拓扑, 84
积空间, 84
紧致空间, 84
结合律, 12
绝对的, 150, 152

κ-$c.c.$, 230
κ-反链性质, 230
κ-完全的, 123
κ 下终究为常量, 110
卡氏积, 17

可公理化的, 4
可数反链性质, 224
可数的, 44
可构成公理, 195
可构成集, 191
可测基数, 133
可测集, 86
可逆的, 21
寇尼希定理, 106
寇尼希引理, 103
康托 -伯恩斯坦定理, 43
康托正则形式, 76
康托集, 57
开函数, 83
开覆盖, 84
开集, 83
扩张, 21
空集, 7

λ-封闭的, 233
λ-强的, 109
力迫, 208
力迫定理, 219
力迫条件, 208
勒贝格测度, 86
广义连续统假设, 100
洛文海姆 -司寇伦定理, 139
滤, 119, 208
理想, 24, 121
理论, 4
类, 7
良基关系, 159
良基的, 143
良序, 37
良序集, 37
良序集基本定理, 63
连接的, 25
连续函数, 83, 125
连续统假设, 100
连续统函数, 100
连续统函数在 κ 下的不动点, 110
连续统基数, 100

幂集, 9
幂集公理, 9
满射, 21
美名, 227
莫斯托夫斯基函数, 161
莫斯托夫斯基坍塌, 161
马洛基数, 134

内模型, 196
内部, 83
拟序, 31
逆, 18
逆像, 18

$\mathbb{P}$-名字, 210
p 下稠密, 213
偏序, 25
平凡滤, 120
平凡理想, 121
平稳集, 128
陪集, 87

p 强于 q, 208
全序, 25
前段, 61
前段序数, 92
前驱, 159
奇异基数假设, 112
奇异的, 101
强不可达基数, 103
强极限的, 109

任意交, 8
弱不可达基数, 103

σ-完全的, 123
上界, 26
上确界, 26
似集合的, 159
双射, 21
双连续函数, 83
受囿量词, 150
司寇伦函数, 139
司寇伦壳, 139
商集, 24
实数, 52
素理想, 122

同构, 138
同胚, 83
塔斯基公式, 107
投射函数, 22
拓扑, 83
拓扑基, 83
拓扑空间, 83
替换公理模式, 11
脱殊扩张, 210
脱殊滤, 209

τ 的值, 211

外延公理, 6
外测度, 86
完备线序集, 54
无原子的, 209
无界, 124
无界的, 101
无界闭滤, 126
无界闭集, 124
无穷公理, 10, 34
无穷的, 44

下界, 26
下确界, 26
像, 18
希尔伯特第一问题, v
序, 25
序列, 39, 70
序型, 65, 68, 97
序数, 65
相容的, 21, 209
相容的系统, 21
相对于 M 由 ψ 通过参数可定义的, 183
相对于哥德尔运算封闭, 184
相对化, 146
线序, 25
选择公理, 11, 23, 81
选择函数, 23
限制, 21

一一函数, 21
一致的, 4
一般卡氏积, 22
有序对, 16
有理数, 49
有穷交性质, 121
有穷的, 44

主滤, 120
主理想, 121
主超滤, 122
佐恩引理, 82
值域, 17
区间套定理, 55
子基, 83
子模型, 138

子覆盖, 84
子集, 9
指标系统, 22
指标集, 22
支持, 59
整数, 47
最大元, 26
最小上界性质, 52
正则公理, 10
正则的, 101
真前段, 61
真子集, 9
真类, 7
秩, 141
自反的, 23
自然数, 34
至多可数的, 44
证明, 4
(严格）增函数, 62

对集公理, 8

第二归纳原理, 37

[General Information]
书名=集合论 对无穷概念的探索
作者=郝兆宽，杨跃著
页数=246
SS号=13649157
DX号=
出版日期=2014.09
出版社=复旦大学出版社

封面
书名
版权
前言
目录
第一章　集合与公理
1.1　罗素悖论
1.2　一点数理逻辑
1.3　公理
1.4　习题
第二章　关系与函数
2.1　关系
2.2　函数
2.3　等价与划分
2.4　序
2.5　习题
第三章　实数的构造
3.1　自然数
3.2　自然数上的递归定理与运算
3.3　等势
3.4　整数与有理数
3.5　实数
3.6　不可数集合
3.7　习题
第四章　序数
4.1　良序集
4.2　序数
4.3　超穷归纳与递归
4.4　序数算术
4.5　古德斯坦定理
4.6　选择公理
4.7　习题
第五章　基数
5.1　定义基数
5.2　基数算术
5.3　共尾

5.4　无穷和与积
5.5　基数幂运算
5.6　习题
第六章　滤、理想与无界闭集
6.1　集合上的滤
6.2　无界闭滤
6.3　习题
第七章　集合的宇宙
7.1　一点数理逻辑
7.2　层垒的谱系
7.3　相对化
7.4　绝对性
7.5　基础公理的相对一致性
7.6　基于良基关系的归纳与递归
7.7　基础公理下的绝对性
7.8　不可达基数与ZFC的模型
7.9　反映定理
7.10　习题
第八章　可构成集
8.1　可定义性与哥德尔运算
8.2　哥德尔的L
8.3　可构成公理与相对一致性
8.4　习题
第九章　力迫
9.1　力迫法的基本思想
9.2　脱殊扩张
9.3　力迫
9.4　M[G]中的ZFC
9.5　CH的相对独立性
9.6　CH+?GCH的相对一致性
9.7　习题
参考文献
索引